C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 83–86

Informatique théorique/*Computer Science*

Sous-ensembles homogènes de $\mathbb{Z}^2$ et pavages du plan

Maurice Nivat

LIAFA CNRS UMR 7089, Université Paris 7, case 7014, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

Reçu le 11 février 2002 ; accepté le 7 mars 2002

Note présentée par Maurice Nivat.

Résumé Nous appelons sous-ensemble homogène de degré k pour F du plan discret $\mathbb{Z}^2$ tout sous-ensemble tel qu'à travers toutes les positions possibles d'une fenêtre finie que l'on translate apparait toujours le même nombre k de points de A. Nous montrons deux propriétés, il existe un sous-ensemble homogène de degré 1 pour F si et seulement si F pave le plan par translation. Si la fenêtre est rectangulaire tout sous-ensemble homogène de degré k pour F est l'union disjointe de k sous-ensembles homogènes de degré 1 pour F. ***Pour citer cet article : M. Nivat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 83–86.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Homogeneous subsets of $\mathbb{Z}^2$ and plane tilings

Abstract We say that the subset A of the discrete plane $\mathbb{Z}^2$ is k-homogeneous for F if and only if whichever is the position of a finite window F which we translate over $\mathbb{Z}^2$ the same number k of points of A appears in the window. And we prove two properties. There exists a 1-homogeneous subset for F if and only if F tiles the plane by translation. If the window is a rectangle every k-homogeneous subset is the disjoint union of k 1-homogeneous subset. ***To cite this article: M. Nivat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 83–86.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$. Sa fonction caractéristique est l'application U_A de $\mathbb{Z}^2$ dans $\{0, 1\}$ donnée par

$$U_A(z) = 1 \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{Z}^2,$$
$$U_A(z) = 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{Z}^2 \setminus A.$$

Soit F une partie finie de $\mathbb{Z}^2$ contenant l'origine $(0, 0)$: $F = \{f_0 = (0, 0), f_1, \ldots, f_n\}$. Pour définir les sous-ensembles homogènes de $\mathbb{Z}^2$ on regarde l'ensemble A à travers la fenêtre F déplacée par translation dans toutes les positions possibles, l'ensemble A est dit homogène de degré k pour F si quelque soit la position de la fenêtre on voit exactement k points de A.

On peut écrire cette propriété de la façon suivante : A est homogène de degré k pour F si et seulement si

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{Z}^2 \quad \operatorname{card}\big((z + F) \cap A\big) = k$$

si et seulement si

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{Z}^2 \quad \operatorname{card}\big\{ f \in F \mid U_A(z + F) = 1 \big\} = k.$$

Adresse e-mail : tcsmn@liafa.jussieu.fr (M. Nivat).

S1631-073X(02)02377-4/FLA

L'ensemble $z + F = \{z + f \mid f \in F\}$ est bien l'ensemble des points qui apparaissent dans la fenêtre F quand on lui a fait subir la translation de vecteur z. Un ensemble de translatées de F, $\{c + F \mid z \in C\}$, constitue un recouvrement de $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si

$$\mathbb{Z}^2 \subseteq \bigcup \{c + F \mid c \in C\}$$

ce que l'on peut écrire

$$\mathbb{Z}^2 = F + C,$$

où $F + C$ est la somme de Minkovski de F et de C

$$F + C = \{f + c \mid f \in F,\ c \in C\}.$$

Clairement $\forall z \in \mathbb{Z}^2\ \exists (f, c) \in F \times C : z = f + c$. Si de plus pour tout $z \in \mathbb{Z}^2$ il existe une et une seule paire (f, c) telle que $z = f + c$ le recouvrement est un pavage de $\mathbb{Z}^2$ pour des translatées de F ce que nous écrivons $\mathbb{Z}^2 = F \oplus C$ en utilisant les notations de [2]. La somme non ambigüe $F \oplus C$ est égale à $F + C$ mais n'est définie que si $\forall (f, c), (f', c') \in F \times C$

$$f + c = f' + c' \to f = f' \quad \text{et} \quad c = c'.$$

1. Pavages et ensembles homogènes

Il y a un lien fort entre pavages du plan par translation [1] et sous-ensembles homogènes de $\mathbb{Z}^2$ qui se résume dans le théorème suivant.

THÉORÈME 1. – *Il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{Z}^2$ homogène de de degré* 1 *pour F si et seulement si F pave le plan par translation.*

Les ensembles homogènes de degré 1 pour F sont tous les ensembles A tels que

$$\mathbb{Z}^2 = A \oplus F.$$

Démonstration. – Supposons que $\mathbb{Z}^2 = A \oplus F$. Toute fenêtre $z + F$ contient exactement un point de A, en effet tout point $z + f_i$ de $z + F$ est égal à $a_i + g_i$ pour quelque $a_i \in A$ et $g_i \in F$. Et l'on ne peut avoir $g_i = g_j$ avec $i \neq j$. Car on aurait alors $(z + f_i) - (z + f_j) = (a_i + g_i) - (a_j + g_j)$ soit $f_i - f_j = a_i - a_j$ ou encore $a_i + f_j = a_j + f_i$ ce qui contredit la non ambiguité de la somme $A \oplus F$.

Ainsi les g_i forment une permutation des f_i, il en existe donc un et un seul g_i qui est égal à $(0, 0)$: le point $z + f_i = a_j$ est le seul point de A qui se trouve dans $z + F$.

Réciproquement supposons que A soit homogène de degré 1 pour F et montrons que $\mathbb{Z}^2 = A \oplus F$. Prenons un point quelconque z de $\mathbb{Z}^2$ et appelons g_j l'élément unique de F tel que $z - f_i + g_i \in A$.

On ne peut avoir $g_i = g_j$ avec $i \neq j$ car on aurait alors si $g_i = g_j = g$

$$z + g - f_i \in A \quad \text{et} \quad z + g - f_j \in A,$$

ou encore $(z + g - f_i - f_j) + f_i \in A$ et $(z + g - f_i - f_j) + f_j \in A$. C'est-à-dire deux points dans la fenêtre $z + g - f_i - f_j + F$ contrairement à l'hypothèse. On conclue comme précédemment : les g_i forment une permutation des f_i et il existe donc un et un seul indice j tel que $g_j = (0, 0)$. On a bien alors

$$z = (z - f_i) + f_j, \quad \text{ou } z - f_j \in A \text{ et } f_i \in F$$

et $(z - f_j, f_j)$ est la seule paire (a, f) de $A \times F$ telle que $z = a + f$. $\square$

Il est assez évident qu'il existe des ensembles homogénes de degré supérieur à 2 pour des fenêtres qui ne pavent pas le plan par translation.

Par exemple on peut considérer le pavage du plan par $F = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ dont une partie est dessinée Fig. 1 et un ensemble homogène de degré 1 pour F.

Si l'on accole 2 copies de F pour former une nouvelle fenêtre $F' = F_1 \cup F_2$ il est clair que A est homogène de degré 2 pour F' et visiblement les fenêtres de la Fig. 2 obtenues en accolant deux copies de F ne pavent pas le plan.

Pour citer cet article : M. Nivat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 83–86

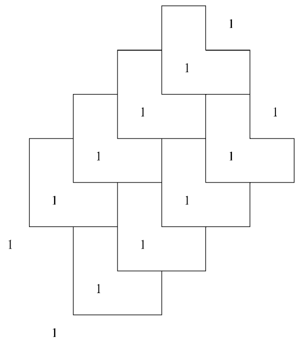

Figure 1. – Pavage par F.

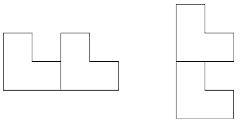

Figure 2. – Deux copies de F.

2. Théorème de décomposition des sous-ensembles homogènes de degré k

Pour une fenêtre rectangulaire F de longueur m et de hauteur n c'est-à-dire

$$F = \{(i, j) \mid 0 \leqslant i \leqslant m-1, 0 \leqslant j \leqslant n-1\}$$

on a la propriété remarquable suivante :

THÉORÈME 2. – *Tout sous-ensemble homogène de degré k pour F rectangulaire est l'union disjointe de k sous-ensembles homogènes de degré* 1.

La preuve repose sur une propriété des ensembles homogènes de degré k pour F rectangulaire qui s'énonce simplement.

PROPRIÉTÉ 1. – *Si A est homogène pour F rectangulaire alors pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ l'ensemble des* 4 *points* $\{(p, q), (p+m, q), (p, q+n), (p+m, q+n)\}$ *contient* 0, 2 *ou* 4 *points de A et s'il en contient* 2 *seulement ces deux points ont même abscisse ou même ordonnée.*

Démonstration. – Les 4 points en question sont les sommets d'un rectangle de longueur $m+1$ et de hauteur $n+1$, dans la Fig. 3 un 1 dans la case (p, q) indique que le point (p, q) appartient à A et un zéro que le point (p, q) n'appartient pas à A. Il ne peut y avoir 2 zéros au sommet d'une des diagonales et un 1 en un autre sommet.

Si tel est le cas la fenêtre $(p, q) + F$ contenant k points on peut supposer qui'il se répartissent en k_1 points dans l'ensemble $\{(p, q+j) \mid 1 \leqslant j \leqslant n-1\}$ k_2 points dans l'ensemble $\{(p+i, q) \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$ et k_3 points dans l'ensemble $\{(p+i, q+j) \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1, 1 \leqslant j \leqslant n-1\}$ avec évidemment $k_1+k_2+k_3+1 = k$.

La fenêtre $(p+1, q) + F$ contenant k points, il y en a k_1+1 dans l'ensemble $\{(p+m, q+j) \mid 1 \leqslant j \leqslant n-1\}$ et la fenêtre $(p, q+1) + F$ contenant également k points, il y en a k_2+1 dans l'ensemble $\{(p+i, q+n) \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$. Mais alors la fenêtre $(p+1, q+1) + F$ contient au moins $k_1+k_2+k_3+2 = k+1$ points ce qui est impossible.

Si parmi les 4 points il y en a deux dans A, qui sont forcément les extrémités d'un des côté du rectangle et un 3 ème qui n'est pas dans A alors le 4-ème n'y est pas non plus.

On compte les points dans les 4 fenêtres $(p, q) + F$ $(p+1, q) + F$ $(p, q+1) + F$ $(p+1, q+1) + F$ de la même façon que sur la Fig. 4. $\square$

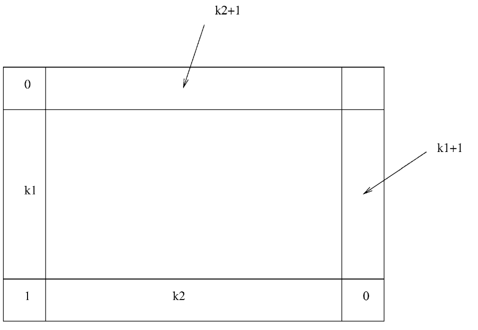

Figure 3. – Rectangle.

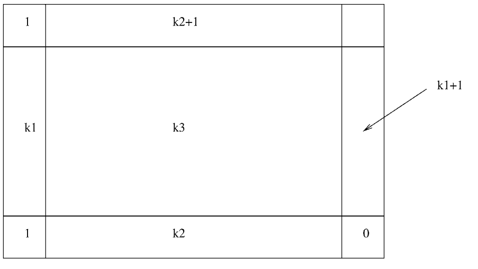

Figure 4. – Comptage.

Preuve du théorème. – Soit A homogène de degré K pour la fenêtre rectangulaire F. On montre qu'il existe $A_1 \subseteq A$ qui est homogène de degré 1 pour F. Clairement si tel est le cas $A \setminus A_1$ est homogène de degré $K-1$ pour F puisque toute fenêtre contient k points de A et un point de A_1, donc $k-1$ points de $A \setminus A_1$. Ou bien il existe (p,q) tel que tous les points de $(p+m\mathbb{Z}) \times (q+n\mathbb{Z})$ sont dans A auquel cas on peut prendre pour A_1 précisèment cet ensemble $(p+m\mathbb{Z}) \times (q+n\mathbb{Z})$ soit il n'existe pas de tel (p,q). Dans ce cas on considère $(p,q) \in A$ tel que $(p+m,q)$ ou $(p-m,q) \notin A$, on supposera $(p+m,q) \notin A$, le cas $(p-m,q) \notin A$ étant symétrique. On sait alors que $(p,q+n)$ et $(p,q-n)$ sont aussi dans A et que $(p+m,q+n)$ et $(p+m,q-n)$ ne sont pas dans A.

Et clairement pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ $(p,q+\ell n) \in A$ et $(p+m,q+\ell n) \notin A$. Mais dans cette situation il y a sûrement un point $(p+m,q+j)$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, qui appartient à A et alors tous les points $(p+m,q+j+\ell n)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, appartiennent aussi à A. Par symétrie et par recurrence on voit alors que pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ il existe un point $(p+\ell m,q+j_\ell)$, $1 \leqslant j_\ell \leqslant n-1$, qui est dans A ainsi que tous les points $(p+\ell m,q+j_\ell+\ell' n)$, $\ell' \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble A_1 des points $(p+\ell m,q+j_\ell+\ell' n)$, $\ell,\ell' \in \mathbb{Z}$, est homogène de degré 1 pour la fenêtre F. On note que A_1 est invariant par la translation verticale $(0,n)$. S'il n'y a pas de point (p,q) dans A tel que $(p+m,q)$ ou $(p-m,q)$ n'est pas dans A, l'ensemble A est invariant par la translation horizontale $(m,0)$. Et l'on construit alors comme ci-dessus un ensemble A_1 homogène de degré 1 pour F, contenu dans A et invariant par la translation $(m,0)$. $\square$

Références bibliographiques

[1] D. Beauquier, M. Nivat, Tiling the plane with one tile, in: Proc. of the 6th Ann. Symp. on Comp. Geometry, ACM, Berkeley, 1990, pp. 128–138.

[2] R. Tijdeman, Decomposition of the integers as a direct sum of two subsets, in: S. David (Ed.), Number Theory, Number Theory Seminar, Paris, 1992–1993, Cambridge University Press, 1995, pp. 261–276.