C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 973–976

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Sur l'équation $\operatorname{div} u = f$

Jean Bourgain [a], Haïm Brezis [b]

[a] **Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA**

[b] **Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, BC 187, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 5, France**

Reçu le 28 février 2002 ; accepté le 4 mars 2002

Note présentée par Jean Bourgain.

Résumé Le résultat principal est le suivant. Soit Ω un domaine borné, à frontière Lipschitzienne dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$. Alors pour tout $f \in \mathrm{L}^d(\Omega)$ avec $\int f = 0$ il existe une solution $u \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{W}^{1,d}(\Omega)$ de l'équation $\operatorname{div} u = f$ dans Ω vérifiant de plus $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et l'estimée

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|u\|_{\mathrm{W}^{1,d}} \leqslant C \|f\|_{\mathrm{L}^d},$$

où C dépend seulement de Ω. Toutefois, on ne peut pas choisir u dépendant linéairement de f. ***Pour citer cet article : J. Bourgain, H. Brezis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 973–976.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the equation $\operatorname{div} u = f$

Abstract The main result is the following. Let Ω be a bounded Lipschitz domain in $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$. Then for every $f \in \mathrm{L}^d(\Omega)$ with $\int f = 0$, there exists a solution $u \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{W}^{1,d}(\Omega)$ of the equation $\operatorname{div} u = f$ in Ω, satisfying in addition $u = 0$ on $\partial\Omega$ and the estimate

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|u\|_{\mathrm{W}^{1,d}} \leqslant C \|f\|_{\mathrm{L}^d},$$

where C depends only on Ω. However one cannot choose u depending linearly on f. ***To cite this article: J. Bourgain, H. Brezis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 973–976.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Consider the equation

$$\operatorname{div} u = f \quad \text{on the torus } \mathbb{T}^d, \tag{1}$$

i.e., on $\mathbb{R}^d$ with 2π-periodic functions in all variables. Clearly (1) is underdetermined and a standard way of tackling (1) is to look for a *special* solution u satisfying the condition $\operatorname{curl} u = 0$, i.e., one looks for a

Adresses e-mail : bourgain@math.ias.edu (J. Bourgain); brezis@ccr.jussieu.fr (H. Brezis).

solution u of the form $u = \operatorname{grad} v$. Eq. (1) then becomes

$$\Delta v = f. \tag{2}$$

Consequently, for every $f \in \mathrm{L}^p$, $1 < p < \infty$, with $\int_{\mathbb{T}^d} f = 0$, Eq. (1) admits a solution $u = \operatorname{grad}(\Delta)^{-1} f \in \mathrm{W}^{1,p}$. Three limiting cases are of interest

(a) $p = 1$. It is well known that when $f \in \mathrm{L}^1$, the solution v of (2) does *not* necessarily belong to $\mathrm{W}^{2,1}$. However one might still hope to have *some* solution u of (1) in $\mathrm{W}^{1,1}$. This is *not* true: for some f's in L^1, Eq. (1) has no solution $u \in \mathrm{W}^{1,1}$ and not even in $\mathrm{L}^{d/(d-1)}$ (*see* [1]).

(b) $p = \infty$. It is well known that when $f \in \mathrm{L}^\infty$ the solution v of (2) does *not* necessarily belong to $\mathrm{W}^{2,\infty}$. However one might hope to have *some* solution u of (1) in $\mathrm{W}^{1,\infty}$. This is not true (*see* [2] and [1]).

(c) $p = d$. This is the heart of our work. For every $f \in \mathrm{L}^d$ with

$$\int f = 0, \tag{3}$$

Eq. (2) admits a solution $v \in \mathrm{W}^{2,d}$ and thus Eq. (1) admits a solution $u = \operatorname{grad} v \in \mathrm{W}^{1,d}$. Since $\mathrm{W}^{1,d}$ is *not* contained in L^∞ (this is a limiting case for the Sobolev imbedding) we *cannot* assert that this u belongs to L^∞. However one might still hope that, given any $f \in \mathrm{L}^d$ with (3), there is *some* $u \in \mathrm{L}^\infty$ solving (1). This is indeed true.

Set

$$\mathrm{L}^d_\# = \left\{ f \in \mathrm{L}^d;\ \int f = 0 \right\}.$$

PROPOSITION 1. – *Given any* $f \in \mathrm{L}^d_\#$ *there is some* $u \in \mathrm{L}^\infty$ *solving* (1) (*in the sense of distributions*) *with*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant C(d) \|f\|_{\mathrm{L}^d}. \tag{4}$$

However there is no bounded linear operator $K : \mathrm{L}^d_\# \to \mathrm{L}^\infty$ *such that* $\operatorname{div}(Kf) = f,\ \forall f \in \mathrm{L}^d_\#$ (*in the sense of distributions*).

The proof of the existence of a solution of (1) satisfying (4) is quite elementary. It follows easily by duality from the Sobolev–Nirenberg imbedding $\mathrm{W}^{1,1} \subset \mathrm{L}^{d/(d-1)}$ and the corresponding estimate

$$\left\| v - \fint v \right\|_{\mathrm{L}^{d/(d-1)}} \leqslant C \|\operatorname{grad} v\|_{\mathrm{L}^1} \quad \forall v \in \mathrm{W}^{1,1}. \tag{5}$$

Since it relies on Hahn–Banach, it is *not* constructive. In fact, one *cannot* choose $u = Kf$, solution of (1) depending linearly on f and satisfying (4). The argument is by contradiction. If such K exists, the averaged operator

$$\widetilde{K} = \int_{\mathbb{T}^d} \tau_{-x} K \tau_x \, \mathrm{d}x, \quad \text{where } \tau_x f(y) = f(y+x), \tag{6}$$

would be a bounded multiplier from L^d into L^∞. A direct summability consideration show that this is impossible (*see* [1] for details).

To summarize, we know that for every $f \in \mathrm{L}^d_\#$, Eq. (1) admits:

(1) a solution $u_1 \in \mathrm{W}^{1,d}$ ($u_1 = \operatorname{grad} \Delta^{-1} f$),

(2) a solution $u_2 \in \mathrm{L}^\infty$ (via Hahn–Banach).

A natural question is whether there is a solution u of (1) in $\mathrm{L}^\infty \cap \mathrm{W}^{1,d}$. This is indeed one of our main results:

Pour citer cet article : J. Bourgain, H. Brezis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 973–976

THEOREM 1. – *For every* $f \in \mathrm{L}^d_\#$ *there exists a solution* $u \in \mathrm{L}^\infty \cap \mathrm{W}^{1,d}$ *of* (1) *satisfying*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|u\|_{\mathrm{W}^{1,d}} \leqslant C(d)\|f\|_{\mathrm{L}^d}. \tag{7}$$

Despite the simplicity of this statement the proof in [1] is rather involved. We exhibit via an explicit *constructive nonlinear* argument some $u \in \mathrm{L}^\infty \cap \mathrm{W}^{1,d}$ satisfying (1) and (7). The conclusion of Theorem 1 is equivalent (via duality) to the estimate

$$\left\| v - \fint v \right\|_{\mathrm{L}^{d/(d-1)}} \leqslant C(d)\|\operatorname{grad} v\|_{\mathrm{L}^1 + \mathrm{W}^{-1,d/(d-1)}} \quad \forall v. \tag{8}$$

When $d = 2$ there is a rather elementary proof of (8) by L^2-Fourier methods (*see* [1]). But we have no direct proof of (8) when $d > 2$.

There is a variant of Theorem 1 where $\mathbb{T}^d$ is replaced by a Lipschitz, connected, bounded domain Ω in $\mathbb{R}^d$ and the periodic condition is replaced by the Dirichlet condition:

THEOREM 2. – *For every* $f \in \mathrm{L}^d_\#(\Omega)$ *there exists some* $u \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{W}^{1,d}(\Omega)$ *solving*

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

and satisfying

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + \|u\|_{\mathrm{W}^{1,d}(\Omega)} \leqslant C(\Omega)\|f\|_{\mathrm{L}^d(\Omega)}. \tag{10}$$

The proof of Theorem 2 relies on Theorem 1 (*see* [1]).

On considère l'équation

$$\operatorname{div} u = f \quad \text{sur le tore } \mathbb{T}^d\ ; \tag{1}$$

autrement dit, on travaille sur $\mathbb{R}^d$ avec des fonctions 2π-périodiques en chaque variable. Clairement, le problème (1) est sous-déterminé et une approche standard consiste à chercher une solution *particulière* de la forme $u = \operatorname{grad} v$. L'équation (1) devient (2) et $u = \operatorname{grad}(\Delta)^{-1} f$ est solution de (1). Il en résulte que pour tout $f \in \mathrm{L}^p$, $1 < p < \infty$, avec $\int_{\mathbb{T}^d} f = 0$, le problème (1) admet une solution $u \in \mathrm{W}^{1,p}$. Trois cas limites attirent l'attention :

(a) $p = 1$. Il est bien connu que si $f \in L^1$ la solution v de (2) n'appartient *pas* nécessairement à $\mathrm{W}^{2,1}$. Donc $u = \operatorname{grad}(\Delta)^{-1} f$ n'appartient pas à $\mathrm{W}^{1,1}$. Mais on pourrait espérer trouver une *autre* solution de (1) qui appartienne à $\mathrm{W}^{1,1}$. Ceci est faux : pour certains f dans L^1 l'équation (1) n'admet *aucune* solution dans $\mathrm{W}^{1,1}$, ni même dans $\mathrm{L}^{d/(d-1)}$ (*voir* [1]).

(b) $p = \infty$. Il est bien connu que si $f \in \mathrm{L}^\infty$, la solution v de (2) n'appartient pas nécessairement à $\mathrm{W}^{2,\infty}$. Donc $u = \operatorname{grad}(\Delta)^{-1} f$ n'appartient pas à $\mathrm{W}^{1,\infty}$. Mais on pourrait espérer trouver une *autre* solution u de (1) dans $\mathrm{W}^{1,\infty}$. Ceci est faux ; voir [2] et [1].

(c) $p = d$. Ce cas est au centre de notre travail. Pour tout $f \in \mathrm{L}^d$ vérifiant (3), la solution v de l'équation (2) appartient à $\mathrm{W}^{2,d}$ et donc $u = \operatorname{grad}(\Delta)^{-1} f$ appartient à $\mathrm{W}^{1,d}$. Par ailleurs $\mathrm{W}^{1,d}$ n'est *pas* contenu dans L^∞ (cas limite de l'injection de Sobolev). Donc, en général $u = \operatorname{grad}(\Delta)^{-1} f$ n'appartient *pas* à L^∞. Mais on pourrait espérer trouver une *autre* solution u de (1) qui appartienne à L^∞. Ceci est effectivement vrai. On pose

$$\mathrm{L}^d_\# = \left\{ f \in \mathrm{L}^d;\ \int f = 0 \right\}.$$

PROPOSITION 1. – *Pour tout* $f \in L^d_\#$ *il existe* $u \in L^\infty$ *solution de* (1) (*au sens des distributions*) *et vérifiant* (4). *Toutefois, il n'existe pas d'opérateur linéaire borné* $K : L^d_\# \to L^\infty$ *tel que* $\operatorname{div}(Kf) = f$ (*au sens des distributions*), *pour tout* $f \in L^d_\#$.

La preuve de l'existence d'une solution de (1) vérifiant (4) est aisée. Elle résulte, simplement, par dualité, de l'injection de Sobolev–Nirenberg $W^{1,1} \subset L^{d/(d-1)}$ et de l'estimée correspondante (5). Cette preuve, qui utilise Hahn–Banach n'est *pas* constructive. En fait, on ne peut *pas* choisir $u = Kf$, solution de (1), dépendant linéairement de f et vérifiant (4). L'argument est par contradiction. Si un tel opérateur existe, on considère l'opérateur « moyenné » $\widetilde{K}$ défini par (6), qui est un multiplicateur borné de L^d dans L^∞. Une considération directe de sommabilité montre que ceci est impossible (*voir* [1] pour les détails). Une autre approche consiste à utiliser le théorème de Grothendieck sur les opérateurs 1-sommant (*voir* [1]).

En résumé, on sait donc que pour tout $f \in L^d_\#$, l'équation (1) admet :

(1) une solution $u_1 \in W^{1,d}$ ($u_1 = \operatorname{grad}(\Delta)^{-1} f$),

(2) une solution $u_2 \in L^\infty$ (via Hahn–Banach).

Il est naturel de se poser la question de savoir s'il existe une solution u de (1) qui appartienne *simultanément* à L^∞ et à $W^{1,d}$. Ceci est effectivement le cas :

THÉORÈME 1. – *Pour tout* $f \in L^d_\#$, *il existe une solution* $u \in L^\infty \cap W^{1,d}$ *de* (1) *et vérifiant* (7).

Malgré la simplicité de l'énoncé, la démonstration (*voir* [1]) est assez compliquée. On exhibe par une *construction non linéaire* explicite, une fonction $u \in L^\infty \cap W^{1,d}$ vérifiant (1) et (7). La conclusion du Théorème 1 est équivalente (par dualité) à l'estimée (8). Toute la difficulté pour prouver (8) provient du fait que si l'on a une décomposition de grad v sous la forme $\operatorname{grad} v = g_1 + g_2$ avec $g_1 \in L^1$ et $g_2 \in W^{-1,d/(d-1)}$, les deux termes g_1 et g_2 ne sont *pas* nécessairement des gradients. Lorsque $d = 2$ nous présentons dans [1] une démonstration assez élémentaire de (8) par une méthode de Fourier. Par contre, nous ne connaissons pas de preuve directe de (8) lorsque $d > 2$.

Il y a une variante du Théorème 1 où $\mathbb{T}^d$ est remplacé par un domaine Ω borné, connexe, à bord lipschitzien, dans $\mathbb{R}^d$ et la condition périodique est remplacée par une condition de Dirichlet :

THÉORÈME 2. – *Pour tout* $f \in L^d_\#(\Omega)$ *il existe* $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,d}(\Omega)$ *solution de* (9) *qui vérifie* (10).

Bien entendu, le Théorème 2 implique le Théorème 1, mais sa démonstration utilise le Théorème 1 ; voir [1].

Références bibliographiques

[1] J. Bourgain, H. Brezis, On the equation $\operatorname{div} Y = f$ and application to control of phases (à paraître).
[2] C.T. Mc Mullen, Lipschitz maps and nets in Euclidean space, Geom. Funct. Anal. 8 (1998) 304–314.