C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 783–786

Géometrie différentielle/*Differential Geometry*

Produits* de Kontsevich sur le fibré cotangent d'un groupe de Lie et formules intégrales

Khaled Tounsi

Département de mathématiques, Faculté des sciences de Sfax, 3018 Sfax, BP 802, Tunisie

Reçu le 23 mai 2001 ; accepté après révision le 4 février 2002

Note présentée par Charles-Michel Marle.

Résumé Nous donnons une description d'une grande classe de produits* naturels sur le fibré cotangent T^*G d'un groupe de Lie G et nous caractérisons ces produits* par des formules integrales ***Pour citer cet article : K. Tounsi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 783–786.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Kontsevich star products on the cotangent bundle of a Lie group and integral formulae

Abstract We describe a large class of natural star products on the cotangent bundle T^*G of a Lie group G and we characterize these star products by integral formulae. ***To cite this article: K. Tounsi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 783–786.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction et rappels

Dans [4], Kontsevich a construit une application $\alpha \mapsto \star_\alpha$ qui associe a chaque structure de Poisson α sur $\mathbb{R}^d$ un produit* $\star_\alpha$ de la forme :

$$f \star_\alpha g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n C_n(\alpha)(f, g),$$

où $C_n(\alpha)$ est un opérateur bidifférentiel et l'application $\alpha \mapsto C_n(\alpha)$ est polynomiale et homogène de degré n. Nous considérons comme dans [1], une géneralisation de cette construction.

On utilise, comme Kontsevich, les graphes orientés admissibles [4]. Si on note par $V_{n,2}$ (resp. $V_{n,1}$) l'espace de tels graphes et qui possedent n sommets de type 1 et deux sommets de type 2 (resp. un sommet de type 2) on définit une application lineaire C de l'espace $V_{n,2}$ dans l'espace des opérateurs bidifferentiels sur $\mathbb{R}^d$ (*voir* [1]).

Une suite (γ_n) $(\gamma_n \in V_{n,2})$ définit un produit* de Kontsevich (dans le sens de [1]) si, pour toute structure de Poisson α,

Adresse e-mail : Khaled.Tounsi@fss.rnu.tn (K. Tounsi).

S1631-073X(02)02308-7/FLA

$$f \star_\alpha g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n C_{\gamma_n}(\alpha)(f,g)$$

est produit* sur $\mathbb{R}^d$.

D'une manière analogue, on a encore une correspondance linéaire D entre l'espace $V_{n,1}$ et l'espace des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^d$ (*voir* [1]).

Nous disons qu'une suite (β_n) $(\beta_n \in V_{n,1})$ définit une équivalence de deux produits* $\alpha \mapsto \star_\alpha$ and $\alpha \mapsto \star'_\alpha$ si pour tout tenseur de Poisson α l'opérateur $T(f) = f + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n D_{\beta_n}(\alpha)(f)$ est un opérateur d'equivalence entre $\star_\alpha$ et $\star'_\alpha$ c'est-à-dire qu'on a : $T(f \star_\alpha g) = T(f) \star'_\alpha T(g)$.

On se restreint au cas du dual d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, munie de sa structure de Poisson usuelle : $\alpha_x(X,Y) = x([X,Y])$ $(x \in \mathfrak{g}^*,\ X,Y \in \mathfrak{g})$ c'est-à-dire au cas ou la structure de Poisson α est linéaire. Dans ce cas, il a éte prouvé dans [1] que la restriction du produit* de S. Gutt $\star_G$ a $\mathfrak{g}^*$ (*voir* [3]) est un produit* de Kontsevich et que tout produit* de Kontsevich est équivalent à $\star_G$, l'opérateur d'équivalence est l'image par C d'une suite (β_n) de combinaisons linéaires de produits de rouex, de plus les $D_{\beta_n}(\alpha)$ sont des opérateurs différentiels avec des coefficients constant P (*voir* [1] pour plus de détails).

Dans la suite, on note par $\star_K$ un produit* de Kontsevich (dans le sens de [1]) sur $\mathfrak{g}^*$ et par $D_{\beta_n}(\alpha)$ l'opérateur d'équivalence associé.

Soit maintenant G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit T^*G son fibré cotangent. On va prouver dans la suite qu'on peut étendre tout produit* $\star_K$ sur $\mathfrak{g}^*$ a un produit* sur T^*G qui peut être caracterisé par une formule integrale.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G ; chaque X_j definit un champ de vecteurs X_j^* sur G :

$$X_j^* \varphi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi\bigl(\exp(-tX_j) \cdot x\bigr)|_{t=0} \quad \bigl(\varphi \in \mathrm{C}^\infty(G)\bigr).$$

Notons $p_j(\alpha) = \alpha(X_j^*)_{\pi(\alpha)}$ $(\alpha \in T^*G)$. Ici $\pi : T^*G \to G$ est la projection canonique.

Si on identifie canoniquement T^*G a $G \times \mathfrak{g}^*$, les p_j sont les coordonnées de α dans le second facteur.

Rappelons enfin que le produit* de S. Gutt $\star_G$ sur T^*G est caracterisé par les deux conditions :

1. Le produit* de $\pi^*\varphi$ par tout f dans $\mathrm{C}^\infty(T^*G)$ est :

$$\pi^*\varphi \star_G f = \pi^*\varphi f + \sum_{r=1}^{\infty} (-\hbar)^r \frac{1}{r!} \sum_{j_1,\ldots,j_r} \pi^*\bigl(X_{j_1}^* \cdots X_{j_r}^* \varphi\bigr) \frac{\partial f}{\partial p_{j_1} \cdots \partial p_{j_r}}.$$

2. La « partie verticale » de $\star_G$, i.e. le produit de deux fonctions polynomiales dans les variables p_j est :

$$P \star_G Q = \sum_{r=0}^{k+k'-1} (2\hbar)^r \Phi^{-1}\bigl[\bigl(\Phi(P) \cdot \Phi(Q)\bigr)_{k+k'-r}\bigr]$$

si P est homogène de degré k, Q homogène de degré k' et $\mathfrak{A}_\ell$ est l'espace $\Phi(S^\ell(\mathfrak{g}))$ avec :

$$\Phi : S(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{g}), \quad \Phi(p_{j_1}, \ldots, p_{j_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} X_{j_{\sigma(1)}} \cdot \cdots \cdot X_{j_{\sigma(k)}}$$

$(\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et $\cdot$ son produit).

2. Extension des produits* de Kontsevich à T^*G

THÉORÈME. – *Soit $\star_1$ un produit* sur $\mathfrak{g}^*$. On suppose qu'il existe un opérateur d'équivalence entre $\star_1$ et la restriction de $\star_G$ à $\mathfrak{g}^*$:*

$$T = \mathrm{Id} + \sum_{r \geqslant 1} \hbar^r T_r, \quad f \star_1 g = T^{-1}\bigl(T(f) \star_G T(g)\bigr) \quad \forall f,g \in \mathrm{C}^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

où chaque T_k est un opérateur differentiel à coefficients constants sur $\mathfrak{g}^*$.

Alors, il existe un unique produit $\star'$ *sur* T^*G *vérifiant* :

(i) *Pour tout* φ *dans* $\mathrm{C}^\infty(G)$, *pour tout* f *dans* $\mathrm{C}^\infty(T^*G)$:

$$(\pi^*\varphi)\star' f=(\pi^*\varphi)\star_G f=(\pi^*\varphi)f+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\hbar^r}{r!}\sum_{i_1,\dots,i_r}\pi^*\bigl(X^*_{i_1}\cdots X^*_{i_r}\varphi\bigr)\frac{\partial^r f}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_r}}.$$

(ii) *Pour tous* P, Q *dans* $S(\mathfrak{g})$, $P\star' Q=P\star_1 Q$.

Démonstration. – Suivant l'argument de [3] (Théorème 4), on prouve que (i) et (ii) determinent le produit $(\pi^*\varphi\cdot P)\star'(\pi^*\psi\cdot Q)$. Maintenant, on peut ecrire : $f\star' g=\sum_{r=o}^{\infty}\hbar^r C_r(f,g)$, pour tout f, g dans $\mathrm{C}^\infty(G)\otimes S(\mathfrak{g})$, où les C_r sont des opérateurs bidifferentiels. Ils peuvent être étendu à des opérateurs bidifferentiels sur $\mathrm{C}^\infty(T^*G)$.

Vu que les T_k sont des opérateurs differentiels à coefficients constants, on les étend alors en des opérateurs G-invariants (notés encore T_k) sur T^*G. Notons $\partial/\partial p_i$ par Z_i, on aura alors :

$$\begin{aligned}T\bigl((\pi^*\varphi)\star' f\bigr)&=T\left((\pi^*\varphi)\cdot f+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\lambda^r}{r!}\sum_{i_1,\dots,i_r}\pi^*\bigl(X^*_{i_1}\cdots X^*_{i_r}\varphi\bigr)(Z_{i_1}\cdots Z_{i_r}f)\right)\\&=\pi^*\varphi\cdot T(f)+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\hbar^r}{r!}\sum_{i_1,\dots,i_r}\pi^*\bigl(X^*_{i_1}\cdots X^*_{i_r}\varphi\bigr)T(Z_{i_1}\cdots Z_{i_r}f).\end{aligned}$$

Finalement, comme $[T,Z_j]=0$, alors :

$$T\bigl((\pi^*\varphi)\star' f\bigr)=\pi^*\varphi\cdot T(f)+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\hbar^r}{r!}\sum_{i_1,\dots,i_r}\pi^*\bigl(X^*_{i_1}\cdots X^*_{i_r}\varphi\bigr)Z_{i_1}\cdots Z_{i_r}T(f)=T(\pi^*\varphi)\star_G T(f).$$

Les produits* $\star'$ et $\star_G$ sont équivalents, ce qui prouve l'associativité de $\star'$.

COROLLAIRE. – *Tout produit* de Kontsevich* $\star_K$ *sur* $\mathfrak{g}^*$ *s'étend à un produit** $\star'_K$ *sur* T^*G *vérifiant* :

(i) *Pour tout* φ *dans* $\mathrm{C}^\infty(G)$, *pour tout* f *dans* $\mathrm{C}^\infty(T^*G)$, $(\pi^*\varphi)\star'_K f=(\pi^*\varphi)\star_G f$;

(ii) *Pour tout* P, Q *dans* $S(\mathfrak{g})$, $P\star'_K Q=P\star_K Q$.

3. Formules intégrales pour les produits* de Kontsevich

Rappelons maintenant la formule intégrale du produit* de S. Gutt $\star_G$ sur T^*G (*voir* [2] par exemple). D'abord on identifie T^*G a $G\times\mathfrak{g}^*$ et si d est la dimension de G, pour f dans $\mathrm{C}^\infty(G)\otimes S(\mathfrak{g})$, on désigne par A_f l'opérateur agissant sur $\mathrm{C}^\infty_c(G)$ par :

$$A_f(\varphi)(x)=\hbar^{-d}\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle p,X\rangle}f\left(x\cdot\exp\frac{X}{2},p\right)\varphi(x\cdot\exp X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}p.$$

Alors le produit $\star_G$ est donné par :

$$A_{f\star_G g}=A_f\circ A_g\quad\text{por tous } f,g\in\mathrm{C}^\infty(G)\otimes S(\mathfrak{g}).$$

Maintanant un produit* de Kontsevich $\star_K$ sur $S(\mathfrak{g})$ est équivalent à la restriction de $\star_G$ par l'opérateur :

$$T=\mathrm{Id}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|s|=n}a_{s_1,\dots,s_k}D_{W_{s_1}\vee\cdots\vee W_{s_k}},$$

où $W_{s_1},\dots,W_{s_k}$ étant des rouex de tailles respectives $s_1,\dots,s_k$ (*voir* [1]). Notons par F fonction formelle definie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par :

$$F(X)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\hbar^n\sum_{|s|=n}a_{s_1,\dots,s_k}\operatorname{tr}(\mathrm{i}\operatorname{ad}X)^{s_1}\cdots\operatorname{tr}(\mathrm{i}\operatorname{ad}X)^{s_k}.$$

Alors on a :

PROPOSITION. – *Soit* f *dans* $\mathrm{C}^\infty(G) \otimes S(\mathfrak{g})$ *et soit l'opérateur* B_f *agissant sur* $\mathrm{C}_c^\infty(G)$ *par* :

$$B_f(\varphi)(x) = \hbar^{-d} \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle p,X\rangle} f\left(x \cdot \exp\left(-\frac{X}{2}\right), p\right) \varphi\big(x \cdot \exp(-X)\big) F\left(\frac{X}{\hbar}\right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}p.$$

*Alors, le produit** $\star'_K$ *est donné par* :

$$B_{f\star'_K g} = B_f \circ B_g \quad \textit{por tous } f, g \textit{ in } \mathrm{C}^\infty(G) \otimes S(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. – L'opérateur d'équivalence T entre $\star_G$ et $\star'_K$ s'écrit :

$$Tf(x,p) = T(f_x)(p) \quad \text{où } f_x : \mathfrak{g}^* \to w\mathbb{R}\,;\ \ f_x(p) = f(x,p).$$

D'autre part, si g est dans $\mathrm{C}_c^\infty(\mathfrak{g}^*)$ ou dans $S(\mathfrak{g})$ et si l'on note $\hat{g}$ sa transformée de Fourier definie par :

$$\hat{g}(X) = \int_{\mathfrak{g}^*} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle p,X\rangle} g(p)\,\mathrm{d}p,$$

alors $T(\hat{g})(X) = \hat{g}(X)F(X)$ (*voir* [4]), c'est-à-dire :

$$T(g)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathfrak{g}} \hat{g}(X)F(X)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle p,X\rangle}\,\mathrm{d}X.$$

D'une manière analogue, si f est dans $\mathrm{C}_c^\infty(G \times \mathfrak{g}^*)$ ou $\mathrm{C}^\infty(G) \otimes S(\mathfrak{g})$, on a :

$$\begin{aligned} T(f)(x,p) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathfrak{g}} \hat{f}_2(x,Y)F(X)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle p,Y\rangle}\,\mathrm{d}Y \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} f(x,q)F(Y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\langle p,Y\rangle - \langle q,Y\rangle)}\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}q, \end{aligned}$$

où $\hat{f}_2$ est la transformée de Fourier partielle de f par rapport a la deuxième variable.

Notons par B_f l'opérateur $B_f = A_{T(f)}$, pour f dans $\mathrm{C}^\infty(G) \otimes S(\mathfrak{g})$. Si φ est dans $C_c^\infty(G)$ on obtient :

$$B_f(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle p,X\rangle}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle p-q,Y\rangle} f\left(x \cdot \exp\frac{X}{2}, q\right) F(Y)\varphi(x \cdot \exp X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q.$$

Un calcul simple montre que :

$$B_f(\varphi)(x) = \hbar^{-d} \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle p,X\rangle} f\left(x \cdot \exp\left(-\frac{X}{2}\right), p\right) \varphi\big(x \cdot \exp(-X)\big) F\left(\frac{X}{\hbar}\right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}p.$$

Finallement, pour tout f, g dans $\mathrm{C}^\infty(G) \otimes S(\mathfrak{g})$,

$$B_f \circ B_g = A_{T(f)} \circ A_{T(g)} = A_{T(f)\star_G T(g)} = A_{T(f\star'_K g)} = B_{f\star'_K g}.$$

Références bibliographiques

[1] D. Arnal, N. Ben Amar, M. Masmoudi, Cohomology of good graphs and Kontsevich linear star products, Lett. Math. Phys. 48 (1999) 291–306.

[2] B. Cahen, Deformation program for principal series representations, Lett. Math. Phys. 36 (1996) 65–75.

[3] S. Gutt, An explicit $\star$-product on the cotangent bundle of a Lie group, Lett. Math. Phys. 7 (1983) 249–258.

[4] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds. I, Preprint q-alg/9709040, 1997.