

# Actions moyennables et fonctions harmoniques

Philippe Biane<sup>a</sup>, Emmanuel Germain<sup>b</sup>

<sup>a</sup> CNRS, Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, 45, rue d'Ulm, 75005 Paris, France

<sup>b</sup> Institut de mathématiques de Jussieu, Université Paris VII, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu et accepté le 11 janvier 2002

Note présentée par Alain Connes.

---

## Résumé

On montre que l'action d'un groupe dénombrable discret sur un espace localement compact invariant de fonctions harmoniques minimales est moyennable. *Pour citer cet article : P. Biane, E. Germain, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 355–358.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Ameasurable actions and harmonic functions

## Abstract

We prove that the action of a countable discrete group on a locally compact invariant space of minimal harmonic functions is amenable. *To cite this article: P. Biane, E. Germain, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 355–358.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## 1. Introduction

Soit  $G$  un groupe dénombrable discret, et  $\mu$  une mesure positive à support fini sur  $G$ , adaptée à  $G$  (le support de  $\sum_n \mu^{*n}$  est  $G$ ). Une fonction  $\xi$  sur  $G$  est dite  $\mu$ -harmonique si, pour tout  $g \in G$  on a

$$\xi(g) = \sum_{h \in G} \xi(gh)\mu(h).$$

Les inégalités de Harnack entraînent que les fonctions  $\mu$ -harmoniques positives satisfaisant  $\xi(e) = 1$  forment un ensemble compact pour la topologie de la convergence simple, de plus le groupe  $G$  agit continûment, par multiplication à gauche sur cet ensemble.

$$g \cdot \xi(h) = \xi(g^{-1}h)/\xi(g^{-1}).$$

Une fonction  $\mu$ -harmonique positive non nulle  $h$  est appelée minimale si pour toute fonction  $\mu$ -harmonique positive  $\xi$  sur  $G$  satisfaisant  $\xi \leq h$  il existe une constante  $\lambda \geq 0$  telle que  $\xi = \lambda h$ . Cette définition est classique, cf. [8,11]. Si  $h$  est  $\mu$ -harmonique minimale, alors  $g \cdot h$  l'est également pour tout  $g \in G$ .

**THÉORÈME 1.1.** – *Soit  $\mathcal{H}$  un ensemble localement compact  $G$ -invariant de fonctions  $\mu$ -harmoniques minimales, alors l'action de  $G$  sur  $\mathcal{H}$  est moyennable.*

---

Adresses e-mail : Philippe.Biane@ens.fr (P. Biane); germain@math.jussieu.fr (E. Germain).

Nous introduisons une nouvelle notion ; une fonction  $\mu$ -harmonique  $h$  est appelée fortement minimale si toute fonction dans l'adhérence de l'orbite  $G \cdot h$  est une harmonique minimale. Une conséquence immédiate du Théorème 1.1 est que si  $G$  possède une fonction  $\mu$ -harmonique fortement minimale alors  $G$  est moyennable à l'infini (cf. Définition 5.2.1 de [1]). En particulier le groupe  $G$  satisfait à la conjecture de Novikov. Cela nous permet de retrouver de façon unifiée cette propriété pour de nombreux groupes.

### 2. Actions moyennables

Soit  $G$  un groupe dénombrable discret agissant continûment sur un espace localement compact  $X$ , on dit que l'action de  $G$  est moyennable s'il existe une suite  $f_n$  de fonctions positives, continues, à support compact sur  $X \times G$  telles que

$$\sum_{g \in G} f_n(x, g) = 1, \tag{2.1}$$

$$\sum_{h \in G} |f_n(g^{-1}x, g^{-1}h) - f_n(x, h)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \tag{2.2}$$

uniformément sur tout compact en  $(x, g) \in X \times G$ .

Cependant le groupe  $G$  est discret et dénombrable, donc les orbites de l'action de  $G$  sur  $X$  sont dénombrables et de plus la mesure de comptage sur  $G$  produit un système continu de mesure de Haar pour le groupoïde de l'action de  $G$  sur  $X$ . Ainsi, par le Corollaire 3.3.8(iii) de [1], la condition (2.2) peut être remplacée par la convergence ponctuelle dans  $X \times G$ .

### 3. Démonstration du Théorème 1.1

On pose  $f_n(\xi, g) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi(g) \mu^{*k}(g)$  pour  $\xi \in \mathcal{H}$ . La fonction  $\xi$  étant  $\mu$ -harmonique on a

$$\sum_{g \in G} f_n(\xi, g) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi * \mu^{*k}(e) = \xi(e) = 1$$

et la propriété (2.1) est vérifiée. Introduisons le noyau markovien relativisé par la transformation de Doob

$$P_\xi(g, h) = \mu(g^{-1}h) \xi(h) / \xi(g)$$

dont les puissances sont données par

$$P_\xi^n(g, h) = \mu^{*n}(g^{-1}h) \xi(h) / \xi(g)$$

ce qui nous permet d'exprimer

$$f_n(\xi, g) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_\xi^k(e, g).$$

On a

$$f_n(g^{-1}\xi, g^{-1}h) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu^{*k}(g^{-1}h) \xi(h) / \xi(g) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_\xi^k(g, h)$$

et donc

$$\sum_{h \in G} |f_n(g^{-1}\xi, g^{-1}h) - f_n(\xi, h)| = \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n P_\xi^k(g, \cdot) - P_\xi^k(e, \cdot) \right\|_1.$$

Si  $\xi$  est une harmonique minimale, alors la tribu stationnaire associée à la chaîne de Markov de noyau de transition  $P_\xi$  est triviale. D’après la loi du « zéro ou deux » [5], Théorème 4(ii) on a donc

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n P_\xi^k(g, \cdot) - P_\xi^k(e, \cdot) \right\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

pour tout  $(\xi, g) \in \mathcal{H}$ .  $\square$

#### 4. Exemples et applications

Les groupes discrets moyennables à l’infini (c’est-à-dire admettant une action moyennable sur un espace compact) ont de nombreuses applications en algèbres d’opérateurs : voir [3] pour les applications à la conjecture de Baum–Connes, et [10] pour les applications internes à la théorie des  $C^*$ -algèbres de la notion introduite par Kirchberg.

Jusqu’à présent la construction d’actions moyennables était adaptée à chaque classe de groupe (moyennables, hyperboliques, réseaux dans les groupes de Lie connexe semi-simple). Nous retrouvons ici une grande partie des cas connus de groupes moyennables à l’infini par application directe du Théorème 1.1.

En effet, pour de nombreux groupes, la frontière de Martin est réduite à ses points minimaux, et donc toute harmonique minimale dans la frontière de Martin est fortement minimale. Il en va ainsi pour les groupes hyperboliques au sens de Gromov (cf. [2]) (en particulier pour les groupes libres). Notons aussi, d’après un résultat de Woess (cf. [12]), que si deux groupes ont un sous-ensemble fermé de la frontière de Martin, invariant et formé de points minimaux, alors leur produit libre conserve cette propriété.

Pour les réseaux  $\Gamma$  de covolume fini dans un groupe de Lie semi-simple et de centre fini  $G$ , une variante du Théorème 1.1 est encore possible. Soit  $\mu$  une mesure  $K$ -bi-invariante (ou  $K$  est le compact maximal de  $G$ ), absolument continue par rapport à la mesure de Haar à gauche et adaptée à  $G$ . Alors l’ensemble des fonctions  $r$ -harmoniques minimales (i.e. des fonctions  $\xi$  pour lesquelles  $\xi * \mu = r\xi$ ) pour  $r$  assez grand est parfaitement connu (cf. [7], Théorème 13.12) et fermé.

Soit alors  $X$  un domaine fondamental pour l’action de  $\Gamma$  sur  $G$  à gauche, et  $f_n$  la fonction

$$f_n(\xi, \gamma) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_X r^{-k} \xi(\gamma x) \mu^{*k}(\gamma x) dx$$

pour  $\xi$  une fonction  $r$ -harmonique minimale. Notons que  $f_n$  a un sens puisque  $\mu^k$  est à support fini et que  $\xi$  est bornée sur les compacts.

Alors  $f_n$  vérifie les conditions (2.1) et (2.2) modifiée ; on introduit en effet le noyau de Markov sur  $G$  dont la densité par rapport à la mesure de Haar est  $P_\xi(g, h) = r^{-1} \mu(g^{-1}h) \xi(h) / \xi(g)$ . Il est clair que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |f_n(g^{-1}\xi, g^{-1}\gamma) - f_n(\xi, \gamma)| \leq \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n P_\xi^k(g, \cdot) - P_\xi^k(e, \cdot) \right\|_{L^1(G)}.$$

Puisqu’encore la tribu stationnaire est triviale pour le noyau  $P_\xi$ , le second terme tend vers 0.

Donc  $\Gamma$  admet une action moyennable sur l’ensemble ( $G$ -invariant) des fonctions  $r$ -harmoniques minimales pour  $\mu$ .

Ainsi tout réseau de covolume fini dans un groupe de Lie semi-simple connexe est moyennables à l’infini. Notons au passage que le Théorème 13.12 de [7] s’applique à d’autres situations (groupes réductifs unimodulaires et analogues  $p$ -adiques des groupes semi-simples), et qu’ainsi les réseaux de covolume fini dans ces groupes ont encore des actions moyennables par la méthode décrite ici. Par des méthodes

d'algèbres d'opérateurs, on montre en fait que la restriction sur le covolume est inutile (*voir* [1], Exemples 5.2.2).

Pour finir, Gromov a annoncé dans [6] l'existence d'un groupe non moyennable à l'infini. Ce groupe ne possède donc aucune harmonique fortement minimale pour aucune mesure  $\mu$  adaptée. En particulier pour toute mesure adaptée  $\mu$ , la frontière de Martin  $M_\mu$  possède une harmonique non minimale.

### Références bibliographiques

- [1] C. Anantharaman, J. Renault, Groupoïdes moyennables, Monograph. Enseign. Math., Vol. 36, Genève, 2000.
- [2] A. Ancona, Positive harmonic functions and hyperbolicity, in: Potential Theory – Surveys and Problems, Prague, 1987, Lecture Notes in Math., Vol. 1344, Springer, 1988, pp. 1–23.
- [3] P. Baum, A. Connes, N. Higson, Classifying space for proper group actions and  $K$ -theory of group  $C^*$ -algebras, Contemp. Math. 167 (1994) 241–291.
- [4] N.P. Brown, E. Germain, Dual entropy in discrete groups with amenable actions, Ergodic Theory Dynamical Systems (to appear).
- [5] Y. Derriennic, Lois « zéro ou deux » pour les processus de Markov. Applications aux marches aléatoires, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.) 12 (2) (1976) 111–129.
- [6] M. Gromov, Spaces and questions, in: GAFA 2000, Tel Aviv, 1999.
- [7] Y. Guivar'ch, L. Ji, J.C. Taylor, Compactifications of Symetric Spaces, Birkhäuser, 1998.
- [8] J.G. Kemeny, J.L. Snell, A.W. Knapp, Denumerable Markov Chains, 2nd ed., Graduate Texts in Math., Vol. 40, Springer-Verlag, New York, 1976. With a chapter on Markov random fields, by David Griffeath.
- [9] J.-L. Tu, Remarks on Yu's property A, Bull. Soc. Math. France 129 (2001) 115–139.
- [10] S. Wassermann, Exact  $C^*$ -algebras and related topics, Seoul National University Global Analysis Research Center Lecture Notes 19 (1994).
- [11] W. Woess, Random walks on infinite graphs and groups – a survey on selected topics, Bull. London Math. Soc. 26 (1) (1994) 1–60.
- [12] W. Woess, A description of the Martin boundary for nearest neighbour random walk on free products, in: Probability Measures on Groups, Oberwolfach, 1985, Lecture Notes in Math., Vol. 1210, Springer, Berlin, 1986, pp. 203–215.