C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 349–354

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Un théorème de type Beurling–Lax dans la boule unité

Daniel Alpay [a,1], Aad Dijksma [b], James Rovnyak [c,2]

[a] Département de mathématiques, Université Ben-Gurion du Negev, POB 653, 84105 Beer-Sheva, Israel

[b] Département de mathématiques, Université de Groningue, POB 800, 9700 AV , Groningue, Pays-Bas

[c] Département de mathématiques, Université de Virginie, PO Box 400137, Charlottesville, VA 22904-4137, USA

Reçu le 22 octobre 2001 ; accepté le 7 janvier 2002

Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

Résumé Nous démontrons un théorème de type Beurling–Lax pour une famille d'espaces de Hilbert à noyau reproduisant dont les éléments sont des fonctions analytiques dans un sous ensemble ouvert de la boule unité qui contient l'origine. Ces espaces sont caractérisés par des fonctions appelées multiplicateurs de Schur. Nous utilisons la théorie des relations linéaires dans les espaces de Pontryagin pour donner une réalisation coisométrique pour les multiplicateurs de Schur. ***Pour citer cet article : D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 349–354.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A Beurling–Lax type theorem in the unit ball

Abstract We prove a Beurling–Lax theorem for a family of reproducing kernel Hilbert spaces of functions analytic in an open subset of the unit ball containing the origin. The spaces under consideration are characterized by functions called Schur multipliers. Using the theory of linear relations in Pontryagin spaces we also give coisometric realizations of Schur multipliers. ***To cite this article: D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 349–354.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In the last ten years and originating with the work of Agler and Quiggin [18] it has been understood that much of the analysis in the Hardy space $\mathbf{H}_2$ of the unit disk extends to the reproducing kernel Hilbert spaces with so-called complete Nevanlinna–Pick kernels. These are functions k positive in the sense of reproducing kernels and such that $1/k$ has one positive square. One typical example of such a kernel is as follows. Denote by $\mathbb{B}_N$ the unit ball in $\mathbb{C}^{1\times N}$ and set $\langle z,w\rangle=\sum_{j=1}^N z_j w_j^*$ where $z=(z_1,\dots,z_N)$ and $w=(w_1,\dots,w_N)\in\mathbb{C}^{1\times N}$. Then $k_N(z,w)=\frac{1}{1-\langle z,w\rangle}$ is a complete Nevanlinna–Pick kernel in $\mathbb{B}_N$. For $N>1$ the associated reproducing kernel Hilbert space $\mathcal{H}(k_N)$ is contractively included in the Hardy space of the ball, and the inclusion is strict. For more on the inner product of $\mathcal{H}(k_N)$ we refer to [6]. Spaces isometrically included in $\mathcal{H}(k_N)$ and invariant under the operators of multiplications by the variables z_j have been characterized by Arveson [8], McMullough and Trent [17] and Green, Richter and Sundberg

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay); dijksma@math.rug.nl (A. Dijksma); rovnyak@Virginia.edu (J. Rovnyak).

S1631-073X(02)02271-9/FLA

[15]. The case $N=\infty$ is allowed; one replaces then $\mathbb{C}^{1\times N}$ by ℓ_2 and the corresponding kernel is universal in a sense explained in [1] and [10].

When $N=1$ the results in [8,17] and [15] are related to the Beurling–Lax theorem. Still for $N=1$, a Beurling–Lax type theorem was proved in [4], Theorem 3.1.2, using the theory of linear relations in Pontryagin spaces. In contrast with theorems in [9] and [14] the spaces considered there need not be included in the classical Lebesgue space of the disk. In the present note we use the approach of [4] to prove a Beurling–Lax type theorem in the case of the ball which extends the above mentioned works. For simplicity we focus on the case $N<\infty$ (although our methods may be adapted to the case $N=\infty$).

Before describing the spaces we consider we need some notations. We recall that a Pontryagin space $\mathcal{P}$ is the direct sum of two Hilbert spaces $\mathcal{P}_+$ and $\mathcal{P}_-$ with $\dim \mathcal{P}_- < \infty$ and with indefinite inner product $\langle f,g\rangle_{\mathcal{P}} = \langle f,g\rangle_{\mathcal{P}_+} - \langle f,g\rangle_{\mathcal{P}_-}$. The dimension of $\mathcal{P}_-$ is the *negative index* of $\mathcal{P}$. We refer to [11,16] and [4] for details and references. Let $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ be two Pontryagin spaces with the same negative index $\operatorname{ind}_- \mathcal{F} = \operatorname{ind}_- \mathcal{G}$ and let $\mathbf{L}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ be the set of bounded linear operators from $\mathcal{F}$ into $\mathcal{G}$.

DEFINITION 1. – $\mathbf{S}_0(\mathcal{F},\mathcal{G})$ denotes the set of $\mathbf{L}(\mathcal{F},\mathcal{G})$-valued functions S analytic in a neighbourhood $\Omega(S)\subset\mathbb{B}_N$ containing the origin and such that the kernel

$$K_S(z,w) = \frac{I_{\mathcal{G}} - S(z)S(w)^*}{1-\langle z,w\rangle} \tag{1}$$

is positive when z and w are in $\Omega(S)$.

Elements of $\mathbf{S}_0(\mathcal{F},\mathcal{G})$ will be called *Schur multipliers*. When $\mathcal{F}=\mathcal{G}=\mathbb{C}$ these are the Schur functions which play an important role in operator theory and in the theory of linear systems; see [2]. When, moreover, S is an inner function the reproducing kernel Hilbert space with reproducing kernel K_S is equal to $\mathbf{H}_2\ominus S\mathbf{H}_2$. One recognizes the orthogonal complement of a shift invariant subspace, and this makes the connection with Beurling's theorem. We characterize spaces with reproducing kernel (1) (this is our version of the Beurling–Lax theorem) and associate to every Schur multiplier a coisometric realization.

1. Le théorème de structure

THÉORÈME 2. – *Soit $\mathcal{M}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant dont les éléments sont analytiques dans un ouvert connexe $\Omega\subset\mathbb{B}_N$ qui contient l'origine et dont les valeurs sont dans un espace de Pontryagin $\mathcal{G}$. Supposons qu'il existe des opérateurs linéaires bornés $T_1,\ldots,T_N$ de $\mathcal{M}$ dans lui-même tels que pour tout $f\in\mathcal{M}$*

$$f(z)-f(0) = \sum_{j=1}^N z_j (T_j f)(z), \tag{2}$$

et

$$\sum_{j=1}^N \|T_j f\|^2_{\mathcal{M}} \leqslant \|f\|^2_{\mathcal{M}} - \big\langle f(0), f(0)\big\rangle_{\mathcal{G}}. \tag{3}$$

Il existe alors un espace de Pontryagin $\mathcal{F}$ de même indice négatif que $\mathcal{G}$ et un multiplicateur de Schur $S\in\mathcal{S}_0(\mathcal{F},\mathcal{G})$ analytique dans un ouvert connexe $\Omega'\subset\Omega$ contenant l'origine tel que $\mathcal{H}(S)=\mathcal{M}\big|_{\Omega'}$ avec la norme pour laquelle l'opérateur de restriction est une isométrie. Finallement, lorsque $\mathcal{G}$ est un espace de Hilbert on peut prendre $\Omega'=\Omega=\mathbb{B}_N$ et $\mathcal{M}$, vu comme espace de fonctions définies dans la boule, est inclus contractivement dans $\mathcal{H}(k_N)\otimes\mathcal{G}$.

Idée de la preuve. – Utilisant la propriété (2) on montre d'abord que le noyau reproduisant de $\mathcal{M}$ est égal à

$$K_{\mathcal{M}}(z,w) = G(I_{\mathcal{M}} - zT)^{-1}(I_{\mathcal{M}} - wT)^{-*}G^*, \quad \text{où } T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{pmatrix} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^N,$$

$Gf = f(0)$ et $zT \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{j=1}^N z_j T_j$. Soit $C = \binom{T}{G} \in \mathbf{L}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^N \oplus \mathcal{G})$. L'inégalité (3) peut être réécrite

$$I_{\mathcal{M}} - T^*T - G^*G = I_{\mathcal{M}} - C^*C \geqslant 0,$$

c'est-à-dire $\operatorname{ind}_-(I_{\mathcal{M}} - C^*C) = 0$, où pour un opérateur autoadjoint A dans un espace de Pontryagin $\mathcal{P}$, la notation $\operatorname{ind}_-(A)$ dénote le nombre de carrés négatifs de la fonction $\langle f, Ag\rangle_{\mathcal{P}}$. Utilisant [4, Theorem 1.3.4 (1)] et le fait que $\mathcal{M}$ est un espace de Hilbert on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_-\left(I_{\mathcal{M}^N\oplus\mathcal{G}} - CC^*\right) &= \operatorname{ind}_-\left(I_{\mathcal{M}^N\oplus\mathcal{G}} - CC^*\right) + \operatorname{ind}_-\mathcal{M} \\
&= \operatorname{ind}_-\left(I_{\mathcal{M}} - C^*C\right) + \operatorname{ind}_-\left(\mathcal{M}^N \oplus \mathcal{G}\right) \\
&= \operatorname{ind}_-\left(I_{\mathcal{M}} - C^*C\right) + N\operatorname{ind}_-\mathcal{M} + \operatorname{ind}_-\mathcal{G} = \operatorname{ind}_-\mathcal{G}.
\end{aligned}$$

La théorie de la factorisation des opérateurs auto-adjoints dans les espaces de Kreĭn (*voir* [13]) implique qu'il existe alors un espace de Pontryagin $\mathcal{F}$ tel que $\operatorname{ind}_-\mathcal{F} = \operatorname{ind}_-\mathcal{G}$ et des opérateurs $F \in \mathbf{L}(\mathcal{F}, \mathcal{M}^{N\times 1})$ et $H \in \mathbf{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ tels que

$$I_{\mathcal{M}^N\oplus\mathcal{G}} - \begin{pmatrix} T \\ G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ G \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix}^*.$$

On définit alors Ω' comme l'ensemble des points de Ω pour lesquels l'opérateur $I_{\mathcal{M}} - zT$ est inversible et

$$S(z) = H + G(I_{\mathcal{M}} - zT)^{-1}(zF). \tag{4}$$

Un calcul direct montre que pour $z, w \in \Omega'$

$$G(I_{\mathcal{M}} - zT)^{-1}(I_{\mathcal{M}} - wT)^{-*}G^* = \frac{I_{\mathcal{G}} - S(z)S(w)^*}{1 - \langle z, w\rangle}$$

et donc $S \in \mathbf{S}_0(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Lorsque $\mathcal{M}$ est inclus isométriquement dans $\mathcal{H}(k_N) \otimes \mathcal{G}$ l'espace $\mathcal{M}^\perp$ est égal à $S(\mathcal{H}(k_N) \otimes \mathcal{F})$ et on retrouve les résultats mentionnés plus haut. La réciproque du Théorème 2 est considérée dans le § 3. En fait, les travaux précédents considérent seulement des espaces inclus *isométriquement* dans $\mathcal{H}(k_N) \otimes \mathcal{G}$ et le cas où $\mathcal{G}$ est un espace de Hilbert. Notre approche est plus générale. Lorsque $\mathcal{G}$ est un espace de Hilbert, l'inégalité (3) implique que $\mathcal{M}$ est inclus *contractivement* dans $\mathcal{H}(k_N) \otimes \mathcal{G}$. De plus lorsque $\mathcal{G}$ est un espace de Pontryagin on peut sortir du cadre de $\mathcal{H}(k_N) \otimes \mathcal{G}$ et avoir des espaces de fonctions qui ne sont pas dans l'espace de Lebesgue de la boule unité. C'est là aussi une différence entre les travaux déjà mentionnés et cette Note. Nous donnons un exemple dans le dernier paragraphe de la note.

2. La relation linéaire associée à un multiplicateur de Schur

Nous montrons maintenant que pour tout $S \in \mathbf{S}_0(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ l'espace à noyau reproduisant associé de noyau (1) satisfait aux hypothèses du Théorème 2. Nous utilisons la notion de relation linéaire dans un espace de Pontryagin. Pour les définitions nous renvoyons à [4, Chapter I]. Un calcul direct montre :

PROPOSITION 3. – *La relation linéaire* $R \subset \binom{\mathcal{H}(S)^{N\times 1}}{\mathcal{G}} \times \binom{\mathcal{H}(S)}{\mathcal{F}}$ *définie comme la fermeture des combinaisons linéaires des éléments de la forme*

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} a_1^* I_{\mathcal{G}} \\ \vdots \\ a_N^* I_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} K_S(z,a)u \atop x \right), \begin{pmatrix} (K_S(z,a) - K_S(z,0))u + K_S(z,0)x \\ (S(a)^* - S(0)^*)u + S(0)^*x \end{pmatrix} \right\},$$

où a est dans le domaine d'analyticité de S, $u \in \mathcal{F}$ et $x \in \mathcal{G}$ est isométrique.

Nous remarquons que le domaine de la relation R n'est pas dense lorsque $N > 1$. Plus précisément

$$\{\mathrm{dom}\, R\}^{\perp} = \left\{ f \in \left(\mathcal{H}(S)\right)^{N\times 1} \quad zf(z) \equiv 0 \right\}.$$

La clé des raisonnements qui suivent est la proposition suivante. La preuve pour le case $N = 1$ (*voir* [4, Theorem 1.4.2, p. 29]) utilise l'hypothèse que la relation a un domaine dense. Cette hypothèse est utilisée pour construire un ensemble maximal négatif contenu dans le domaine de R. Dans la situation actuelle, la relation n'a pas de domaine dense mais son domaine contient encore un ensemble maximal négatif (par exemple un ensemble de la forme $\binom{0^{N\times 1}_{\mathcal{H}(S)}}{\mathcal{G}_-}$ où $\mathcal{G}_-$ est un ensemble maximal négatif de $\mathcal{G}$). La démonstration de [4, Theorem 1.4.2, p. 29] reste encore valable dans le cas considéré ici en utilisant un tel ensemble maximal.

PROPOSITION 4. – *La relation R est le graphe d'une isométrie partielle.*

Soit $\begin{pmatrix} T & G \\ F & H \end{pmatrix}$ l'opérateur dont R est le graphe. Pour $x \in \mathcal{G}$ on a $Gx = K_S(z,0)x$ et $Hx = S(0)^*x$. Les opérateurs T et F n'ont pas de domaine dense lorsque $N > 1$ et sont définis par

$$T\left(\begin{pmatrix} a_1^* I_{\mathcal{G}} \\ \vdots \\ a_N^* I_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} K_S(z,a)u \right) = \left(K_S(z,a) - K_S(z,0)\right)u,$$

$$F\left(\begin{pmatrix} a_1^* I_{\mathcal{G}} \\ \vdots \\ a_N^* I_{\mathcal{G}} \end{pmatrix} K_S(z,a)u \right) = \left(S(a)^* - S(0)^*\right)u$$

pour $a = (a_1, \ldots, a_N)$ dans le domaine d'analyticité de S.

PROPOSITION 5. – *Dénotons par les mêmes symboles $\begin{pmatrix} T & G \\ F & H \end{pmatrix}$ une extension contractive de R à $\mathcal{H}(S)^{N\times 1} \oplus \mathcal{G}$. On a $G^*f = f(0)$ et $H^*x = S(0)x$, et, indépendamment de l'extension choisie,*

$$a\left(T^*f\right)(a) = f(a) - f(0), \qquad a\left(F^*x\right)(a) = \left(S(a) - S(0)\right)x. \tag{5}$$

Enfin, on a

$$S(z) = H^* + G^*\left(I_{\mathcal{H}(S)} - zT^*\right)^{-1} zF^*. \tag{6}$$

3. Le théorème de Gleason dans les espaces $\mathcal{H}(S)$

Rappelons d'abord la définition du problème de Gleason. On se donne une famille $\mathcal{K}$ de fonctions analytiques dans $\Omega \subset \mathbb{C}^{1\times N}$. Etant donné $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{K}$ la question est de savoir si il existe des fonctions $g_1, \ldots, g_N \in \mathcal{K}$ telles que

$$f(z) - f(a) = \sum_{j=1}^{N} (z_j - a_j) g_j(z).$$

L'existence de fonctions analytiques provient de la séries de Taylor au point a. La contrainte est que l'on demande que les fonctions appartiennent à $\mathcal{K}$. Voir [19, p. 116] pour une liste d'espaces où le problème de Gleason a une solution. L'équation (5) montre que le problème de Gleason est résoluble dans $\mathcal{H}(S)$. En effet, soit

$$T^* = \begin{pmatrix} T_1^* \\ \vdots \\ T_N^* \end{pmatrix} \quad \text{avec } T_j^* \in \mathbf{L}\big(\mathcal{H}(S), \mathcal{H}(S)\big).$$

On a alors $f(z) - f(0) = \sum_{j=1}^N z_j (T_j^* f)(z)$. Plus généralement nous avons :

$$\begin{aligned} f(z) - f(a) &= G\big\{\big(I_{\mathcal{H}(S)} - zT^*\big)^{-1} - \big(I_{\mathcal{H}(S)} - aT^*\big)^{-1}\big\} f \\ &= G\big(I_{\mathcal{H}(S)} - zT^*\big)^{-1}(z-a)T^*\big(I_{\mathcal{H}(S)} - aT^*\big)^{-1} f \\ &= \sum_{j=1}^N (z_j - a_j)\big(T_j^*\big(I_{\mathcal{H}(S)} - aT^*\big)^{-1} f\big)(z). \end{aligned}$$

Le cas $S = 0$ a été considéré dans [7].

4. Remarques et exemples

On a associé à un multiplicateur de Schur deux réalisations. La première, (4), est coisométrique mais n'est pas explicite. La seconde, (6), est explicite en terme d'opérateurs dans l'espace $\mathcal{H}(S)$, mais a un domaine de définition non dense lorsque $N > 1$. Lorsque $N = 1$, les deux réalisations sont équivalentes ; voir [4]. Cette Note peut être considérée comme le début d'une étude systématique des espaces $\mathcal{H}(S)$ pour le cas $N > 1$. Lorsque $N = 1$ ces espaces ont été introduits et étudiés dans [12].

Nous concluons par un exemple pris de [5]. On définit $\varphi_a(z) = (1 + \langle z, a\rangle)/(1 - \langle z, a\rangle)$.

THÉORÈME 6. – *Soit $J \in \mathbb{C}^{m\times m}$ une matrice unitaire et autoadjointe et soit $c \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ différent de $0_{m\times 1}$ et tel que $c^*Jc = 0$. Soit $p > 0$ et soit a un point de la sphère unité. Soit $U \in \mathbb{C}^{N\times(N-1)}$ tel que $I_N - a^*a = UU^*$. L'espace $\mathcal{M}$ de dimension 1 engendré par la fonction $f(z) = \frac{c}{1-\langle z,a\rangle}$ muni de la norme $\|f\| = \sqrt{p}$ a un noyau reproduisant de la forme*

$$\frac{J - S(z)\widetilde{J}S(w)^*}{1 - \langle z, w\rangle}$$

avec $\widetilde{J} = \begin{pmatrix} I_{N-1} & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ et

$$S(z) = \begin{pmatrix} 0_{m\times(N-1)} & I_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\langle z, a\rangle}\dfrac{czU}{\sqrt{p}} & \dfrac{\varphi_a(z)cc^*J}{2p} \end{pmatrix}.$$

Lorsque $N = 1$, la fonction S est appelée section de Brune. Voir [3] pour une discussion de ces fonctions. La fonction S est analytique dans $\mathbb{C}^{1\times N}$ d'où l'on a enlevé l'hyperplan tangent à la sphère au point a. Pour voir le lien avec le Théorème 2 il suffit de prendre $\mathcal{F} = \mathbb{C}^{(N-1+m)\times 1}$ muni du produit scalaire indéfini $[x, y] = y^*\widetilde{J}x$ et $\mathcal{G} = \mathbb{C}^{m\times 1}$ muni du produit scalaire indéfini $[x, y] = y^*Jx$. Avec $T_j f(z) = a_j^* f(z)$ (2) est vérifiée tandis que l'on a (3) puisque $f(0) = c$ et $c^*Jc = 0$.

[1] The research of D. Alpay was supported by the Israel Science Foundation (Grant no. 322/00).
[2] J. Rovnyak was supported by the National Science Foundation grant DMS-0100437.

Références bibliographiques

[1] J. Agler, J. McCarthy, Complete Nevanlinna–Pick kernels, J. Funct. Anal. 175 (2000) 111–124.
[2] D. Alpay, Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes, Panoramas et Synthèses, Vol. 6, Société Mathématique de France, Paris, 1998.

[3] D. Alpay, V. Bolotnikov, P. Dewilde, A. Dijksma, Sections de Brune en théorie des systèmes non stationnaires, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 330 (2000) 173–178.
[4] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak, H. de Snoo, Schur Functions, Operator Colligations, and Reproducing Kernel Pontryagin Spaces, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 96, Birkhäuser, Basel, 1997.
[5] D. Alpay, C. Dubi, Boundary interpolation in the ball, Linear Algebra Appl. 340 (2002) 33–54.
[6] D. Alpay, H.T. Kaptanoğlu, Integral formulas for a sub-Hardy space of the ball with complete Nevanlinna–Pick reproducing kernel, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 333 (2001) 285–290.
[7] D. Alpay, H.T. Kaptanoğlu, Sous espaces de codimension finie dans la boule unité et un problème de factorisation, C. R. Acad. Sci. Paris 331 (2000) 947–952.
[8] W. Arveson, The curvature invariant of a Hilbert module over $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$, J. Reine Angew. Math. 522 (2000) 173–236.
[9] J. Ball, J.W. Helton, A Beurling–Lax theorem for the Lie group $U(m,n)$ which contains most classical interpolation theory, J. Operator Theory 8 (1983) 107–142.
[10] J. Ball, T. Trent, V. Vinnikov, Interpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernel Hilbert spaces, in: Proceedings of Conference in Honor of the 60-th Birthday of M.A. Kaashoek, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 122, Birkhäuser, 2001, pp. 89–138.
[11] J. Bognár, Indefinite Inner Product Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
[12] L. de Branges, J. Rovnyak, Square Summable Power Series, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
[13] M. Dritschel, J. Rovnyak, Extensions Theorems for Contractions on Kreĭn Spaces, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 47, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 221–305.
[14] H. Dym, J contractive matrix functions, reproducing kernel Hilbert spaces and interpolation, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1989.
[15] D. Greene, S. Richter, C. Sundberg, The structure of inner multipliers on spaces with complete Nevanlinna–Pick kernels, Preprint.
[16] I.S. Iohvidov, M.G. Kreĭn, H. Langer, Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
[17] S. McCullough, T.T. Trent, Invariant subspaces and Nevanlinna–Pick kernels, J. Funct. Anal. 178 (1) (2000) 226–249.
[18] P. Quiggin, For which reproducing kernel Hilbert spaces is Pick's theorem true?, Integral Equations Operator Theory 16 (1993) 244–266.
[19] W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, 1980.