C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 149–154

Statistique/*Statistics*
(Probabilités/*Probability Theory*)

Approximation et inégalités exponentielles pour les sommes de vecteurs aléatoires dépendants

Noureddine Rhomari [a,b]

[a] **CREST-INSEE, LSTA-Université Paris VI et Université Mohammed I, Oujda, Maroc**

[b] **CREST-Labo. Stat., Timbre J340, 3, avenue Pierre Larousse, 92245 Malakoff cedex, France**

Reçu le 5 août 2001 ; accepté après révision le 1er décembre 2001

Note présentée par Paul Deheuvels.

Résumé Dans cette Note, nous présentons un résultat d'approximation (ou couplage) de vecteurs aléatoires dépendants par des vecteurs indépendants. Puis nous établissons des inégalités exponentielles, de type Bernstein, pour les sommes partielles de vecteurs aléatoires dépendants finis et infinis dimensionnels. Nous donnons quelques applications à la loi forte des grands nombre pour des processus absolument réguliers hilbertiens ou banachiques. Pour citer cet article : N. Rhomari, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 149–154. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Approximation and exponential inequalities for sums of dependent random vectors

Abstract We present an approximation result for strongly mixing random vectors and establish some probability inequalities for partial sums of dependent random vectors in finite and infinite dimensional cases. We apply these results to strong law of large number for absolute regular Banach or Hilbert-valued processes. To cite this article: N. Rhomari, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 149–154. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

One of the techniques used to obtain limit theorems in dependent case is the approximation (or coupling) of dependent r.v.'s by independent ones. See, among others, [1,4,10] and the references therein. It is widely used for transporting results from independent framework to dependent case.

In this Note we first state a multidimensional approximation theorem (Theorem 2.1 bellow) which is a simple extension of Bradley's [4] result in $\mathbb{R}$. Under strong mixing dependence, it allowed us to obtain exponential inequalities, in $\mathbb{R}^d$, for partial sums of r.v.'s (*see* theorem 3.5), or their transformations in a separable Banach or Hilbert spaces (Theorems 3.6–3.8). In the absolute regular mixing dependence case, we establish a Bernstein-type inequalities for partial sums of r.v.'s taking their values in a separable Banach or Hilbert spaces (Theorems 3.1–3.4). We consider both cases of bounded and unbounded r.v.'s.

These inequalities extend, especially, those of Pinelis and Sakhanenko [6] and Pinelis [5] to dependent r.v.'s. They improve on the known ones in the dependent case either in finite or infinite dimension.

Adresse e-mail : rhomari@ensae.fr (N. Rhomari).

S1631-073X(02)02242-2/FLA

We give some applications to the strong law of large numbers for absolutely regular Banach or Hilbert-valued random processes (Corollaries 4.1 and 4.2). For example the SLLN holds (*see* Corollaries 4.1 and 4.2 bellow), for all absolutely regular (not necessary stationary) Banach-valued processes, having exponential moment and satisfying the condition $\sum_n (n/p)\beta(p) < \infty$, for some $p = p_n$ such $p \log n/n \to 0$ (the Banach space is assumed of type $1 < \tau \leqslant 2$).

We also precise the rates of convergence (which is almost optimal) and yields, for all probability density in L^2, the strong L^2-consistency of kernel estimate with the rate $\| f_n - Ef_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - Ef_n(x)|^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{O}(\log n/(nh^d))$ a.s. For the notations see the French version.

1. Introduction

Une des techniques utilisées pour montrer des théorèmes limites pour des vecteurs aléatoires (v.a.) dépendants est l'approximation (ou couplage) par des vecteurs indépendants. On peut voir, entre autre, [1,4] et [10], et leurs références. Elle a été utilisée dans beaucoup de travaux pour transporter des résultats du cas indépendant au cas dépendant.

Dans cette Note, nous énonçons, d'abord un théorème d'approximation multi-dimensionnelle qui est une simple extension d'un résultat, dans $\mathbb{R}$, de Bradley [4]. Puis, nous établissons des inégalités exponentielles, de type Bernstein, pour les sommes partielles de vecteurs aléatoires dépendants prenant leurs valeurs dans des espaces de Hilbert ou des Banach séparables, de dimensions finies ou infinies. Nous considérons deux types de dépendances mesurées par les coefficients de mélange fort α ou d'absolue régularité β. Ces inégalités étendent, aux cas dépendants, notamment les résultats de Pinelis et Sakhanenko [6] et Pinelis [5]. Elles sont pratiquement les mêmes que dans le cas réel dépendant et améliorent celles connues. On trouve dans [3] des inégalités pour des processus stationnaires hilbertiens fortement mélangeants qui utilisent la décomposition spectrale de l'opérateur de covariance de la marge.

Nous donnons ici des applications à la loi forte des grands nombres pour des processus absolument réguliers hilbertiens ou banachiques, en précisant leurs vitesses de convergence.

Notations et définitions. – Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. On définit les coefficients du mélange fort, α, et régulier, β, entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, respectivement, par

$$\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \sup\bigl\{\bigl|P(AB) - P(A)P(B)\bigr|\bigr\} \quad \text{et} \quad \beta(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \sup\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\bigl|P(A_iB_j) - P(A_i)P(B_j)\bigr|\right\},$$

$A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$, et $(A_i)_i \subset \mathcal{F}$ et $(B_j)_j \subset \mathcal{G}$ sont des partitions finies de Ω. On écrira, pour deux v.a. X et Y, $\alpha(X,Y) = \alpha(\sigma(X), \sigma(Y))$ où $\sigma(X)$ est la tribu engendrée par X. Pour un processus $\mathbf{X} = (X_t,\ t \in \mathbb{N})$, les coefficients $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ sont définis, pour $l \in \mathbb{N}$, par :

$$\alpha(l) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \alpha(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_{j+l}) \quad \text{et} \quad \beta(l) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \beta(\mathcal{F}_j, \mathcal{G}_{j+l}),$$

où $\mathcal{F}_j = \sigma(X_0, \ldots, \ldots X_j)$ et $\mathcal{G}_i = \sigma(X_t,\ t \geqslant i)$. On sait que $2\alpha(\cdot) \leqslant \beta(\cdot)$. Si y est dans $\mathbb{R}^d$ et Y un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ on posera $|y| = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |y_i|$ et $\|Y\|_\gamma = [E(|Y|^\gamma)]^{1/\gamma}$, $\gamma > 0$. $\mathbb{R}^d$ sera muni de sa tribu borélienne.

2. Approximation

On énonce le théorème d'approximation multi-dimensionnelle que nous utilisons pour obtenir des inégalités exponentielles dans $\mathbb{R}^d$ et ses transformés dans des espaces de Hilbert ou de Banach séparables (théorèmes 3.5–3.8). Soit $(S, \mathcal{S})$ un espace Polonais muni de sa tribu borélienne.

THÉORÈME 2.1. – *Soit X et Y 2 v.a. à valeurs, respectivement, dans S et $\mathbb{R}^d$ et soit U une variable aléatoire uniformément distribuée sur* $[0,1]$, *indépendante de* (X,Y). *Alors pour tout* $q>0$, $\gamma\in]0,\infty]$ *et C de $\mathbb{R}^d$ tels que* $0<q\leqslant\|Y+C\|_\gamma<\infty$ *il existe Y^* vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$, $\sigma(X,Y,U)$-mesurable, vérifiant* :
(i) *Y^* est indépendant de X*, (ii) *Y^* et Y ont la même loi de probabilité, et*
(iii) $P(|Y-Y^*|\geqslant q)\leqslant(2\sqrt{2}\,3^{d/2}+\mathbb{1}_{\gamma<\infty})(\|Y+C\|_\gamma/q)^{d\gamma/(2\gamma+d)}[\alpha(X,Y)]^{2\gamma/(2\gamma+d)}$.

Remarque 1. – Pour $d=1$, la constante dans (iii) est majorée par 6 et dans le cas borné ($\gamma=\infty$) par 5 au lieu de 18 dans Bradley (1983) où C était prise égale à 0. L'introduction du paramètre C s'avère très pratique dans l'application successive de ce théorème (*voir* la preuve du théorème 3.5).

Lorsqu'on transforme le v.a. Y par une famille de fonctionnelles lipshitziennes, alors on peut approcher uniformément cette famille par une autre de même loi et indépendante de X avec la même erreur, à la constante de lipschitz multiplicative près. Plus précisément, soit $(\mathcal{Y},\|\cdot\|)$ un Banach (ou seulement un espace vectoriel semi-normé), T un ensemble quelconque, et $K_t:\mathbb{R}^d\to\mathcal{Y}$ une famille de fonctions telles qu'il existe deux réels positifs L et ν vérifiant $\|K_t(y)-K_t(y')\|\leqslant L\|y-y'\|^\nu$ pour tout y, y' de $\mathbb{R}^d$ et $t\in T$, et $\sup_{t\in T}\|K_t(\cdot)\|$ mesurable. Soit Y un v. a. et $Z_t=K_t(Y)$, alors on obtient facilement,

COROLLAIRE 2.2. – *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *il existe une famille de v.a. $(Z_t^*)_t$ à valeurs dans $\mathcal{Y}$, $\sigma(X,Y,U)$-mesurable, vérifiant* :
(i) *$(Z_t^*)_t$ est indépendante de X*, (ii) *Z_t^* et Z_t ont la même loi pour tout t de T, et*
(iii) $P(\sup_{t\in T}\|Z_t-Z_t^*\|\geqslant q)\leqslant(2\sqrt{2}\,3^{d/2}+\mathbb{1}_{\gamma<\infty})(\|Y+C\|_\gamma(L/q)^{1/\nu})^{d\gamma/(2\gamma+d)}[\alpha(X,Y)]^{2\gamma/(2\gamma+d)}$.

Par exemple si $\{K_t,\ t\in T\}=\{f:\mathbb{R}^d\to\mathcal{Y}$ lipschitzienne $|\ \|f\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant L\}=:\mathcal{F}_L$, le sup dans (iii) devient $\sup_{f\in\mathcal{F}_L}\|f(Y)-f(Y^*)\|$.

3. Inégalités exponentielles

Dans la suite, $\mathcal{Y}$ sera un espace de Banach ou de Hilbert séparable muni de sa norme $\|\cdot\|$ et on note, pour $p=p_n$ entier, $q=q_n=[\frac{n}{p}]_e+1$ si $1\leqslant p\leqslant n$, et $r=r_n=[\frac{n}{2p}]_e+1$ si $1\leqslant p\leqslant\frac{n}{2}$, où $[x]_e$ désigne la partie entière de x. Étant donné $Z_1,\dots,Z_n$, n v.a. on posera $Z_t=0$ et $K_{t,n}(Z_t)=0$ lorsque $t>n$. Tous les paramètres peuvent dépendre de n ; on l'a omis pour alléger les notations.

3.1. *Cadre β-mélangeant.* – Soit $Y_1,\dots,Y_n$, n v.a. à valeurs dans $\mathcal{Y}$.

THÉORÈME 3.1 ($\mathcal{Y}$ Hilbert). – *Si $\forall t$, $E(Y_t)=0$ et pour* $1\leqslant p\leqslant n/2$, $1\leqslant i\leqslant 2r$, $\|Y_{1+(i-1)p}+\cdots+Y_{ip}\|\leqslant M(p)$ *p.s., et* $E\|Y_{1+(i-1)p}+\cdots+Y_{ip}\|^2\leqslant\sigma_i^2(p)$, *on a*

$$P\left(\left\|\sum_{t=1}^n Y_t\right\|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant 4\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4[2\tilde{\sigma}_r^2(p)+\varepsilon M(p)/3]}\right)+\left(\frac{n}{p}+2\right)\beta(p),$$

où $\tilde{\sigma}_r^2(p)=\max\left(\sum_{i=1}^r\sigma_{2i}^2(p),\sum_{i=1}^r\sigma_{2i-1}^2(p)\right)$.

Si $\sigma_i^2(p)\leqslant p\sigma^2$ alors $2\tilde{\sigma}_r^2(p)\leqslant(1+2p/n)n\sigma^2$; et si chaque $\|Y_i\|\leqslant M$ alors $\sigma^2\leqslant M^2\left(1+10\sum_{i=1}^{p-1}\beta(i)\right)$. Mais si les v.a. ne sont pas bornés nous avons

THÉORÈME 3.2 ($\mathcal{Y}$ Hilbert). – *Si $\forall t$, $E(Y_t)=0$ et pour $m\geqslant 2$,* $\max_j\sum_{i=1}^q E\|Y_{j+(i-1)p}\|^m\leqslant qm!\sigma^2M^{m-2}/2$ *alors pour tout $1\leqslant p\leqslant n$ et $\varepsilon>0$ on a*

$$P\left(\left\|\sum_{t=1}^n Y_t\right\|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant 2p\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2p[(n+p)\sigma^2+\varepsilon M]}\right)+n\beta(p).$$

Soit (z_t) une suite de vecteurs de $\mathcal{Y}$, et soit $e^*=\max(E\|\sum_{i=1}^r S_{2i}^*\|,E\|\sum_{i=1}^r S_{2i-1}^*\|)$ où $(S_i^*,\ i=1,\dots,2r)$ sont des v.a. indépendants tels que $S_i^*\overset{\text{loi}}{=}Y_{1+(i-1)p}+\cdots+Y_{ip}$. Alors

THÉORÈME 3.3 ($\mathcal{Y}$ Banach). – *Si pour* $1 \leqslant p \leqslant n/2$ *et* $1 \leqslant i \leqslant 2r$, $\|Y_{1+(i-1)p} + \cdots + Y_{ip} - z_i\| \leqslant M_i(p)$ *p.s., et* $\max\left(\sum_{i=1}^r M_{2i}^2(p), \sum_{i=1}^r M_{2i-1}^2(p)\right) \leqslant \widetilde{M}^2(p)$ *alors pour* $\varepsilon > 2e^*$,

$$P\left(\left\|\sum_{t=1}^n Y_t\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{(\varepsilon - 2e^*)^2}{8\widetilde{M}^2(p)}\right) + \left(\frac{n}{p} + 2\right)\beta(p),$$

et si de plus $M_i(p) \leqslant M(p)$ *et* $E\|Y_{1+(i-1)p} + \cdots + Y_{ip} - z_i\|^2 \leqslant \sigma_i^2(p)$ *alors*

$$P\left(\left\|\sum_{t=1}^n Y_t\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{(\varepsilon - 2e^*)^2}{4[2\tilde{\sigma}_r^2(p) + (\varepsilon - 2e^*)M(p)/3]}\right) + \left(\frac{n}{p} + 2\right)\beta(p),$$

où $\tilde{\sigma}_r^2(p) = \max\left(\sum_{i=1}^r \sigma_{2i}^2(p), \sum_{i=1}^r \sigma_{2i-1}^2(p)\right)$.

Dans le cas non borné, notons $e_j^*(q) = E\|\sum_{i=1}^q Y_{j,i}^*\|$ et $e^*(q) = \max_j e_j^*(q)$ où $(Y_{j,i}^*,\ i = 1, \ldots, q)$ sont des v.a. indépendants tels que $Y_{j,i}^* \overset{\text{loi}}{=} Y_{j+(i-1)p}$. Alors nous avons

THÉORÈME 3.4 ($\mathcal{Y}$ Banach). – *Si pour* $m \geqslant 2$, $\max\limits_j \sum_{i=1}^q E\|Y_{j+(i-1)p} - z_{j+(i-1)p}\|^m \leqslant qm!\sigma^2 M^{m-2}/2$, *alors pour tout* $1 \leqslant p \leqslant n$ *et tout* $\varepsilon > pe^*(q)$, *on a*

$$P\left(\left\|\sum_{t=1}^n Y_t\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant p\exp\left(-\frac{(\varepsilon - pe^*(q))^2}{2p[(n+p)\sigma^2 + (\varepsilon - pe^*(q))M]}\right) + n\beta(p).$$

Si $\|Y_t - z_t\| \leqslant M$ p.s., on peut remplacer le M dans l'exponentielle par $M/3$. Et si $\|Y_t - z_t\| \leqslant \widetilde{M}_t$ p.s., on peut remplacer le dénominateur de l'exponentielle par $2p^2 \max_{1 \leqslant j \leqslant p}(\widetilde{M}_{j,1}^2 + \cdots + \widetilde{M}_{j,q}^2)$.

3.2. *Cadre α-mélangeant.* – Dans ce cadre, nous nous limitons à des v.a. prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et à leurs transformés par des fonctionnelles lipschitziennes à valeurs dans $\mathcal{Y}$. Soit $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. de $\mathbb{R}^d$.

THÉORÈME 3.5 ($\mathbb{R}^d$). – *Si* $\forall t$, $E(X_t) = 0$ *et pour* $1 \leqslant p \leqslant n/2$, $1 \leqslant i \leqslant 2r$, $|X_{1+(i-1)p} + \cdots + X_{ip}| \leqslant M(p)$ *p.s., et* $E|X_{1+(i-1)p} + \cdots + X_{ip}|^2 \leqslant \sigma_i^2(p)$ *alors pour tout* $0 < \theta < 1$, $\delta > 1$ *et* $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\sum_{t=1}^n X_t\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 4\exp\left(-\frac{\theta^2\varepsilon^2}{4[2\tilde{\sigma}_r^2(p) + \theta\varepsilon M(p)/3]}\right) + C_I\left(\frac{n}{p} + 2\right)\alpha(p),$$

où $\tilde{\sigma}_r^2(p) = \max\left(\sum_{i=1}^r \sigma_{2i}^2(p), \sum_{i=1}^r \sigma_{2i-1}^2(p)\right)$ *et* $C_I = 2\sqrt{2}\,3^{d/2}\left\{\frac{\delta+1}{\delta-1}\max\left(\frac{(\delta-1)M(p)r}{(1-\theta)\varepsilon}, 1\right)\right\}^{d/2}$.

Considérons, maintenant, une famille de fonctions $K_{t,n} : (\mathbb{R}^d, |\cdot|) \to (\mathcal{Y}, \|\cdot\|)$, $1 \leqslant t \leqslant n$, vérifiant (avec $|I|$ le nombre d'éléments de I et $\mathrm{L}_n > 0$) :

$$\text{(K)} \qquad \left\|\sum_{t \in I}\left(K_{t,n}(y) - K_{t,n}(z)\right)\right\| \leqslant |I| L_n |y - z|, \quad y, z \in \mathbb{R}^d \text{ et } I \subset \{1, \ldots, n\}.$$

Exemple 1. – Les estimateurs à noyaux de la densité de probabilité sont basés sur des transformations de ce type. Soit K un noyau lipschitzien sur $\mathbb{R}^d$ et (h_n) une suite de réels positifs. L'estimateur à noyau de la densité commune f, des X_i, est $f_n(x) = (1/n)\sum_{t=1}^n (1/h_n^d) K((x - X_t)/h_n)$, $x \in \mathbb{R}^d$, soit $f_n = (1/n)\sum_{t=1}^n K_{t,n}(X_t)$, où $K_{t,n} : \mathbb{R}^d \to \mathcal{Y}$, $u \mapsto K_{t,n}(u) \equiv \{x \mapsto (1/h_n^d)K((x-u)/h_n)\}$, et $\mathcal{Y} \subset \mathrm{L}^1$.

THÉORÈME 3.6 ($\mathcal{Y}$ Hilbert). – *Si* $EK_{t,n}(X_t) = 0$, *si* $\exists \gamma, \sigma, K > 0$ *tels que* $M_\gamma = \max_t \|X_t\|_\gamma$ *et* $\max_j \sum_{i=1}^q E\|K_{j+(i-1)p,n}(X_{j+(i-1)p})\|^m \leqslant qm!\sigma^2 K^{m-2}/2$, *pour* $m \geqslant 2$, *alors pour tout* $1 \leqslant p \leqslant n$, $0 < \theta < 1$, $\delta > 1$ *et* $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left\|\sum_{t=1}^n K_{t,n}(X_t)\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2p\exp\left(-\frac{\theta^2\varepsilon^2}{2p[(n+p)\sigma^2 + \theta\varepsilon K]}\right) + C_K(\gamma)n\left[\alpha(p)\right]^{2\gamma/(2\gamma+d)},$$

et si $\|K_{t,n}(X_t)\| \leqslant K$, *p.s., alors le* K *dans l'argument de l'exponentielle est remplacée par* $K/3$; $C_K(\gamma) = (2\sqrt{2}\,3^{d/2} + \mathbb{1}_{\gamma<\infty})\big\{\frac{\delta+1}{\delta-1}\max\big(\frac{L(\delta-1)M_\gamma pq}{(1-\theta)\varepsilon}, 1\big)\big\}^{d\gamma/(2\gamma+d)}$.

Si les (X_t) sont p.s. bornés ($\gamma = \infty$), le dernier terme de l'inégalité du théorème ci-dessus est $C_K(\infty)(n+p)\alpha(p)$.

Posons $e_j^*(q) = E\big\|\sum_{i=1}^q K_{j+(i-1)p,n}(X_{j,i}^*)\big\|$, et $e^*(q) = \max_j e_j^*(q)$ où $(X_{j,i}^*,\ i = 1,\dots,q)$ sont des v.a. indépendants tels que $X_{j,i}^* \overset{\text{loi}}{=} X_{j+(i-1)p}$. Et soit (z_t) une suite de vecteur de $\mathcal{Y}$, alors nous avons

THÉORÈME 3.7 ($\mathcal{Y}$ Banach). – *Si* $\exists\gamma, \widetilde{K}_t > 0$ *tels que* $M_\gamma = \max_t \|X_t\|_\gamma$, $\|K_{t,n}(X_t) - z_t\| \leqslant \widetilde{K}_t$ *p.s., et* $\widetilde{K}_j^2 + \widetilde{K}_{j+p}^2 + \cdots + \widetilde{K}_{j+(q-1)p}^2 \leqslant q\widetilde{K}^2$ *alors pour tout* $1 \leqslant p \leqslant n$, $0 < \theta < 1$, $\delta > 1$ *et* $\varepsilon > pe^*(q)/\theta$

$$P\left(\left\|\sum_{t=1}^n K_{t,n}(X_t)\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant p\exp\left(-\frac{[\theta\varepsilon - pe^*(q)]^2}{2p(n+p)\widetilde{K}^2}\right) + C_K(\gamma)n\big[\alpha(p)\big]^{2\gamma/(2\gamma+d)}.$$

THÉORÈME 3.8 ($\mathcal{Y}$ Banach). – *Si* $\forall m \geqslant 2$, $\max_j \sum_{i=1}^q E\|K_{j+(i-1)p,n}(X_{j+(i-1)p}) - z_{j+(i-1)p}\|^m \leqslant qm!\sigma^2\widetilde{K}^{m-2}/2$, *alors pour* $1 \leqslant p \leqslant n$, $0 < \theta < 1$, $\delta > 1$ *et* $\varepsilon > pe^*(q)/\theta$,

$$P\left(\left\|\sum_{t=1}^n K_{t,n}(X_t)\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant p\exp\left(-\frac{[\theta\varepsilon - pe^*(q)]^2}{2p[(n+p)\sigma^2 + (\theta\varepsilon - pe^*(q))\widetilde{K}]}\right) + C_K(\gamma)n\big[\alpha(p)\big]^{2\gamma/(2\gamma+d)},$$

et si $\|K_{t,n}(X_t) - z_t\| \leqslant \widetilde{K}$, *p.s., alors le* $\widetilde{K}$ *dans l'exponentielle est remplacé par* $\widetilde{K}/3$.

Remarque 2. – En combinant les preuves des présents résultats et de [2], des inégalités similaires peuvent être obtenues pour les processus à temps continu et les champs aléatoires à temps discret ou continu prenant leurs valeurs dans un espace de Banach ou de Hilbert séparable.

4. Applications

Nous présentons ici quelques applications dans le cadre β-mélangeant. Soit $Y_1, \dots, Y_n$ n v.a. à valeurs dans $\mathcal{Y}$ et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

4.1. *Vecteurs m-dépendants.* – Supposons que les (Y_t) sont $(p-1)$-dépendants (i.e. $(Y_t,\ t \leqslant i)$ et $(Y_t,\ t \geqslant j)$ sont indépendants dès que $j - i > p - 1$) ; alors $\beta(p) = 0$. On peut énoncer dans le cas non bornés d'autres bornes similaires à celles du théorème 3.1. À titre d'exemple, on a, avec e^* du le théorème 3.3,

– Si $\mathcal{Y}$ Hilbert : si $E(Y_t) = 0$ et pour $m \geqslant 2$, $\max_{j=0,1}\sum_{i=1}^r E\|Y_{1+(2i-j-1)p} + \cdots + Y_{(2i-j)p}\|^m \leqslant m!\sigma^2M^{m-2}/2$, alors pour tout $n \geqslant 2p$ et $\varepsilon > 0$, $P(\|S_n\| \geqslant \varepsilon) \leqslant 4\exp\big(-\frac{\varepsilon^2}{4(2\sigma^2+\varepsilon M)}\big)$.

– Si $\mathcal{Y}$ Banach : si pour $m \geqslant 2$, $\max_{j=0,1}\sum_{i=1}^r E\|Y_{1+(2i-j-1)p} + \cdots + Y_{(2i-j)p} - z_{j,i}\|^m \leqslant m!\sigma^2M^{m-2}/2$, alors pour tout $n \geqslant 2p$ et $\varepsilon > 2e^*$, $P(\|S_n\| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp\big(-\frac{(\varepsilon-2e^*)^2}{4[2\sigma^2+(\varepsilon-2e^*)M]}\big)$.

Si $\|Y_{1+(i-1)p} + \cdots + Y_{ip}\| \leqslant M(p)$, p.s., alors on peut remplacer le M des exponentielles ci-dessus par $M(p)/3$ et aussi σ^2 par $\tilde{\sigma}_r^2(p)$ respectivement du théorème 3.1 et 3.3.

4.2. *Mélange géométrique.* – Si $\mathcal{Y}$ est un Hilbert et les (Y_i) vérifient la condition de Cramer (ou $E(\mathrm{e}^{\theta\|Y_i\|})$ existe pour un $\theta > 0$) et $\beta(n) = \mathrm{O}(\rho^n)$, $0 < \rho < 1$, alors pour tout ε il existe c_1 et c_2, positifs, dépendant seulement des lois des (Y_i) et de ε tels que pour $n \geqslant n(\rho)$ on a $P(\|S_n/n\| \geqslant \varepsilon) \leqslant c_1\,\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{n}}$.

Remarque 3. – Cette borne est à comparer avec les corollaires 2.4 et 2.5, pages 60 et 63 de [3] qui dans le cadre stationnaire et de mélange fort géométrique, obtient, sous une condition supplémentaire de décroissance exponentielle des valeurs propres de l'opérateur de covariance, dans le cas borné $n^{1/3}$, mais seulement $n^{1/5}$ sous la condition de Cramer.

4.3. *Loi forte des grands nombres.* – Soit $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un processus absolument régulier centré et borné (non nécessairement stationnaire) l'hypothèse de bornitude est faite pour simplifier les preuves.

COROLLAIRE 4.1. – *Si $\mathcal{Y}$ est un Hilbert alors*
(1) $S_n/n \to 0$*, p.s., dès que* $p\log n/n \to 0$ *et* $\sum_n (n/p)\beta(p) < \infty$;
(2) *Si et* $\beta(n) = \mathrm{O}(n^{-a}\log^{-b} n)$ *avec* ($a > 3$ *et* $b \in \mathbb{R}$) *ou* ($a = 3$ *et* $b > 3$) *alors* $\|S_n/n\| = \mathrm{O}(\log n/n)^{1/2}$, *p.s. Mais si* ($a = 3$ *et* $b > 1$) *alors* $\|S_n/n\| = \mathrm{O}(\log^2 n/n)^{1/2}$*, p.s.*

On en déduit la vitesse presque optimale de l'estimateur à noyau de la densité f dans L^2 pour tout processus dans $\mathbb{R}^d$ dont la densité marginale commune est dans L^2 et le mélange est comme en (2) ci-dessus (K dans L^2) ; avec les notations de l'exemple précédent, $\|f_n - Ef_n\|_2^2 = \mathrm{O}(\log n/(nh^d))$, p.s.

COROLLAIRE 4.2. – *Si $\mathcal{Y}$ est un Banach de type τ ($1 < \tau \leqslant 2$) alors* $\|S_n/n\| = \mathrm{O}\big((p\log n/n)^{1/2} + (p/n)^{1-1/\tau}\big)$*, p.s., dès que* $p\log n/n \to 0$ *et* $\sum_n (n/p)\beta(p) < \infty$.

Cette dernière borne peut être améliorée pour les espaces L^p. Dans [9] nous avons montré, grâce à ces inégalités, la convergence p.s. avec la vitesse optimale de l'estimateur à noyau de la densité dans L^1 sous la même condition du mélange du corollaire 4.2. D'autres applications ont été étudiées, notamment l'estimation de la fonction de régression dans un modèle explicatif hilbertien (ou banachique). Des inégalités maximales pour des v. a. dépendants à valeurs dans un Hilbert ou un Banach séparables sont en cours de rédaction ; elles amélioreront et permettront d'obtenir des vitesses dans les lois fortes des grands nombres similaires au cas réel, et d'affaiblir les conditions sur le mélange. Les preuves sont dans [7] et [8].

Références bibliographiques

[1] Berbee H.C.P., Random walks with stationary increments and renewal theory, Math. Centre Tracts, Amsterdam, 1979.
[2] Bertail P., Politis D.N., Rhomari N., Subsampling continous parameter random fields and a Bernstein inequality, Statistics 33 (2000) 367–392.
[3] Bosq D., Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications, Lecture Notes in Statist., 2000.
[4] Bradley R., Approximation theorems for strongly mixing random variables, Michigan Math. J. 30 (1983) 69–81.
[5] Pinelis I.F., Inequalities for distribution of sums of independent random vectors and their application to estimating density, Theory Probab. Appl. 35 (1990) 605–607.
[6] Pinelis I.F., Sakhanenko A.I., Remarks on inequalities for large deviation probabilities, Theory Probab. Appl. 30 (1985) 143–148.
[7] Rhomari N., Approximation multidimensionnelle de vecteurs aléatoires dépendants par des vecteurs indépendants, Manuscrit, 1998.
[8] Rhomari N., Approximation et inégalités exponentielles pour les sommes de vecteurs aléatoires dépendants avec applications, Manuscrit, 2000.
[9] Rhomari N., Estimation de la densité dans L^1 pour des vecteurs aléatoires dépendants, Manuscrit, 2001.
[10] Rio E., Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants, Springer, 2000.