C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 167–172

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*
(Analyse numérique/*Numerical Analysis*)

Un nouveau problème spectral en interaction fluide-structure avec transpiration

Miguel Ángel Fernández [a], Patrick Le Tallec [b]

[a] INRIA Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France

[b] École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 9 novembre 2001 ; accepté le 26 novembre 2001

Note présentée par Olivier Pironneau.

Résumé Dans cette Note on caractérise les valeurs et vecteurs propres d'un nouveau problème spectral couplant les équations de Navier–Stokes incompressibles linéarisées et celles d'une structure réduite, par le moyen des conditions de type transpiration, et issu de l'analyse de stabilité de systèmes en interaction fluide-structure. Notre approche s'appuie sur la définition d'un opérateur compact particulier agissant dans un espace de Hilbert. Pour citer cet article : M.A. Fernández, P. Le Tallec, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 167–172. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A new spectral problem in fluid-structure interaction with transpiration

Abstract The aim of this Note is to provide a rigorous mathematical treatment of a new spectral problem, coming from a linear stability analysis in fluid-structure interaction. This eigenproblem involves the linearized incompressible Navier–Stokes equations coupled with those of a reduced structure, by means of specific transpiration boundary conditions. We prove that the eigensolutions of this spectral problem can be obtained from the characteristic values of a compact operator acting on a Hilbert space. To cite this article: M.A. Fernández, P. Le Tallec, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 167–172. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

1. Introduction

In this work we study a differential eigenvalue problem coming from the linear stability analysis of a reduced structure immersed in a viscous incompressible flow. The coupling between the solid and the fluid is realized through specific transpiration boundary conditions. Our main result shows that the spectrum consists of a discrete set of complex eigenvalues, each of finite multiplicity, which can cluster only at infinity.

Adresses e-mail : miguel.fernandez@inria.fr (M.Á. Fernández); patrick.letallec@polytechnique.fr (P. Le Tallec).

S1631-073X(02)02236-7/FLA

2. The spectral problem

Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^3$, with a locally Lipschitz continuous boundary Γ. We assume that there exists a non-empty connected open subset Ω^s of Ω, with locally Lipschitz continuous boundary, γ, and such that $\overline{\Omega}^s \subset \Omega$. With this notation we set $\Omega^f = \Omega - \overline{\Omega}^s$, see Figure 1.

We introduce the following quadratic eigenvalue problem: find $\lambda \in \mathbb{C}$, $u : \Omega^f \to \mathbb{C}^3$, $p : \Omega^f \to \mathbb{C}$, and $s \in \mathbb{C}^N$, with $\int_{\Omega^f} p \, \mathrm{d}x = 0$ and $(u, p, s) \neq 0$, satisfying (2). Here, $u_0 : \Omega^f \to \mathbb{R}^3$ and $p_0 : \Omega^f \to \mathbb{R}$ stand for a steady Navier–Stokes solution of (1). The matrix $\Phi = [\varphi_1|\varphi_2|\ldots|\varphi_N]$ stands for the reduced modal basis, and M and K denote, respectively, the tangential mass and stiffness matrices of the structure.

In this Note we will not go into the details of how (2) can be obtained from the physical problem. Let us mention that the transpiration condition (2) comes from the interaction between the fluid and the structure [5]. A complete derivation of (2), and a detailed proof of all results appearing in this Note can be found in [6,7]. We focus on the mathematical analysis of problem (2).

3. Eigenvalue characterization

In order to linearize (2) we set $z = -\lambda s \in \mathbb{C}^N$. Hence, problem (2) becomes: find $\lambda \in \mathbb{C}$, $u : \Omega^f \to \mathbb{C}^3$, $p : \Omega^f \to \mathbb{C}$ and $s, z \in \mathbb{C}^N$, with $\int_{\Omega^f} p \, \mathrm{d}x = 0$ and $(u, p, s, z) \neq 0$, satisfying (3). This problem motivates the definition of a specific operator.

We introduce the Hilbert space $\mathbb{H} = \mathrm{L}^2(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, and the following operator, associated to (2), $T : (f, h, g) \in \mathbb{H} \to T(f, g, h) = (u, z, s) \in \mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, where (u, s) is defined as from (4), and $z = rs - g$, with $r > 0$ sufficiently large.

Remark 1. – If $(\lambda; u, p, z, s)$ is a solution of (3), then $\mu = \lambda + r$ verifies $\mu T(u, z, s) = (u, z, s)$, hence $\mu \neq 0$ and $(1/\mu; u, z, s)$ is a eigenpair of T. Reciprocally, if $\mu \neq 0$ is a characteristic value of T then $1/\mu - r$ is a eigenvalue of (3).

Remark 2. – The operator T is well defined if (4) has a unique solution.

THEOREM 3.1. – *There is a scalar* $r > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$ *such that problem* (4) *has a unique solution in* $\mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathrm{L}^2_0(\Omega^f) \times \mathbb{C}^N$. *Moreover, we get the estimation*: $\|s\| + |u|_{1,\Omega^f} + \|p\|_{0,\Omega^f} \leqslant C_2(\|f\|_{0,\Omega^f} + \|g\| + \|h\|)$, *where* $C_2 > 0$ *is a constant independent of* (u, p, s) *and* (f, g, h).

As from Theorem 3.1 we get that T is a linear continuous operator from $\mathbb{H}$ to $\mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$. Thus, the compact embedding of $\mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ in $\mathbb{H}$ implies that T is a compact operator acting in $\mathbb{H}$. With Remark 1 and applying the spectral theory of compact operators [1], we can prove the following theorem:

THEOREM 3.2. – *The set of solutions of* (2) *consists of a countable sequence of complex numbers, each with finite multiplicity, which can cluster only at infinity.*

---

1. Introduction

Ce travail constitue une première étude mathématique rigoureuse d'un nouveau problème spectral issu de l'analyse de stabilité linéaire d'un système couplé fluide-structure [6,7]. Ce problème couple les équations de Navier–Stokes incompressibles linéarisées avec celles d'une structure réduite par l'intermédiaire de conditions de type transpiration.

Dans la première partie, nous introduisons le problème spectral traité. Nous montrons, dans une deuxième partie, que la détermination des fréquences propres du système couplé se réduit à la détermination des valeurs caractéristiques d'un certain opérateur compact agissant dans un espace de Hilbert.

La démonstration détaillée des résultats apparaissant dans cette Note se trouve dans [6,7].

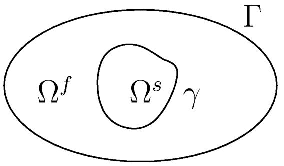

Figure 1. – Le domaine de calcul Ω.

2. Le problème spectral

Soit Ω un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^3$, avec frontière lipschitzienne notée Γ. On suppose qu'il existe un sous-ensemble Ω^s de Ω, non vide, connexe, avec frontière lipschitzienne, notée γ, et tel que $\overline{\Omega}^s \subset \Omega$. Ce domaine représente la structure dans sa configuration d'équilibre, et le complément est le domaine occupé par le fluide. Avec ces notations on pose $\Omega^f = \Omega - \overline{\Omega}^s$, voir la figure 1.

On introduit un champ de vitesses $u_0 : \Omega^f \to \mathbb{R}^3$ et un champ de pression $p_0 : \Omega^f \to \mathbb{R}$, solution du problème de Navier–Stokes stationnaire suivant :

$$\begin{aligned}
&\nabla u_0 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_0) + \frac{1}{\rho}\nabla p_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&\operatorname{div} u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&u_0 = u_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma,\\
&u_0 = 0 \quad \text{sur } \gamma,
\end{aligned} \tag{1}$$

avec $\varepsilon(u_0) = \frac{1}{2}[\nabla u_0 + (\nabla u_0)^{\mathrm{T}}]$, $\nu > 0$ étant la viscosité cinématique du fluide, ρ la densité volumique, et u_Γ la vitesse imposée sur Γ. On supposera que u_0 et p_0 sont des fonctions régulières, soit par exemple $u_0 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}^f)^3$ et $p_0 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}^f)$. On introduit aussi un nombre fini, N, de déformées modales, $\varphi_i : \Omega^s \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, \ldots, N$, que l'on supposera à volume constant, c'est-à-dire $\int_\gamma \varphi_i \cdot n \,\mathrm{d}a = 0$, $i = 1, \ldots, N$, où n dénote le vecteur normal unitaire sur γ (dirigé vers Ω^s). La matrice de taille $3 \times N$, $\Phi = [\varphi_1|\varphi_2|\ldots|\varphi_N]$, représente la basse tronquée de déformées modales. Le comportement de la structure autour de la configuration d'équilibre est supposé être caractérisé par des matrices de masse, M, et de rigidité, K, d'ordre N, symétriques et définies positives.

À ce point, on introduit le problème spectral quadratique suivant (défini sur domaine fixe) : chercher $\lambda \in \mathbb{C}$, $u : \Omega^f \to \mathbb{C}^3$, $p : \Omega^f \to \mathbb{C}$ et $s \in \mathbb{C}^N$, avec $\int_{\Omega^f} p \,\mathrm{d}x = 0$ et $(u, p, s) \neq 0$, tels que

$$\begin{aligned}
&\nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \lambda u \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&u = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\
&u = -\lambda \Phi s - \nabla u_0 \Phi s \quad \text{sur } \gamma,\\
&\lambda^2 \mathrm{M} s + (\mathrm{K} + \mathrm{B}^0) s = -\int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}} \sigma(u, p) n \,\mathrm{d}a,
\end{aligned} \tag{2}$$

où $\sigma(u, p) = -p\,\mathrm{I} + 2\mu\varepsilon(u)$, $\mu = \rho\nu$ la viscosité dynamique du fluide et B^0 est une matrice réelle, d'ordre N, fonction de u_0, p_0 et Φ, représentant la matrice de raideur géométrique associée aux contraintes d'interface fluide-structure.

Dans cette Note, on n'explicitera pas comment dériver le problème spectral (2) à partir du problème physique, ni l'expression de la matrice B^0, voir [6,7] pour le détails. Cependant, on remarque que la condition de bord $(2)_4$ et la matrice B^0 proviennent d'un couplage fluide-structure issu d'une approche par transpiration [5], où $\lambda \Phi s$ dénote la vitesse locale de la structure et $-\nabla u_0 \Phi s$ le terme induit par le transport de l'interface (on se place en écriture eulérienne sur le fluide).

Dans le cas où le fluide est supposé immobile à l'équilibre, $(u_0, p_0) = 0$, le problème (2) fait intervenir les équations de Stokes. Ce type de problème a été introduit et complètement étudié dans [2]. En présence d'écoulement permanent (u_0, p_0), et si on néglige B^0 et le terme de gradient ∇u_0 dans la condition de transpiration, le problème quadratique aux valeurs propres (2) fait intervenir les équations de Navier–Stokes linéarisées, et correspond à celui introduit dans [3,9]. À notre connaissance, aucune étude mathématique rigoureuse n'a été menée jusqu'à ces jours sur ce dernier problème.

Remarque 1. – On impose la condition de moyenne nulle sur la pression car celle-ci est définie à une constante additive près [8].

3. Caractérisation des valeurs propres

On s'intéresse dans cette section à l'analyse mathématique du problème (2). Le principe de base, voir [2–4], consiste en la définition d'un certain opérateur compact qui caractérisera les solutions de (2).

D'abord, pour linéariser (2) on introduit une nouvelle inconnue $z = -\lambda s \in \mathbb{C}^N$, de sorte que le problème aux valeurs propres (2) devient : chercher $\lambda \in \mathbb{C}$, $u : \Omega^f \to \mathbb{C}^3$, $p : \Omega^f \to \mathbb{C}$ et $s, z \in \mathbb{C}^N$, avec $\int_{\Omega^f} p \,\mathrm{d}x = 0$ et $(u, p, s, z) \neq 0$, tels que

$$
\begin{aligned}
&\nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \lambda u \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&u = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\
&u = \Phi z - \nabla u_0 \Phi s \quad \text{sur } \gamma,\\
&-z = \lambda s,\\
&\mathrm{M}^{-1}\left[\left(\mathrm{K} + \mathrm{B}^0\right) s + \int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}} \sigma(u, p) n \,\mathrm{d}a\right] = \lambda z.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Ce problème motive la définition d'un certain opérateur T. On introduit l'espace de Hilbert $\mathbb{H} = \mathrm{L}^2(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, et l'opérateur $T : (f, h, g) \in \mathbb{H} \to T(f, g, h) = (u, z, s) \in \mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$, où (u, z, s) est défini comme « solution » (pour r suffisamment grand) du problème suivant, associé à (3) : pour $(f, h, g) \in \mathbb{H}$ chercher $(u, s, z) \in \mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^N \in \mathbb{C}^N$ et $p \in \mathrm{L}^2_0(\Omega^f)$ tels que

$$
\begin{aligned}
&\nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p + r u = f \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&u = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\
&u = -\Phi g - \nabla u_0 \Phi s + r \Phi s \quad \text{sur } \gamma,\\
&\left(\mathrm{K} + \mathrm{B}^0\right) s + \int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}} \sigma(u, p) n \,\mathrm{d}a + r^2 \mathrm{M} s = \mathrm{M}(h + r g), \quad z = r s - g.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Remarque 2. – Si $(\lambda; u, p, z, s)$ est solution de (3), alors $\mu = \lambda + r$ vérifie $\mu T(u, z, s) = (u, z, s)$, ainsi $\mu \neq 0$ et $(1/\mu; u, z, s)$ est un élément propre de T. Réciproquement, si $\mu \neq 0$ est valeur propre de T alors $1/\mu - r$ est valeur propre dans (3). Pour montrer que l'opérateur T est bien défini, on doit montrer que le problème (4) admet une et une seule solution.

La preuve de l'existence et l'unicité de solution pour (4) nécessite l'introduction de quelques résultats préliminaires. On commence pour décomposer (u, p) de la façon suivante : $(u, p) = (u_1, p_1) + (u_2, p_2) + (u_3, p_3)$, avec (u_1, p_1) solution du problème (purement fluide)

$$
\begin{aligned}
&\nabla u_0 u_1 + \nabla u_1 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_1) + \frac{1}{\rho} \nabla p_1 + r u_1 = f \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&\operatorname{div} u_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\
&u_1 = -\Phi g \quad \text{sur } \gamma,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(u_2, p_2) solution du problème

$$
\begin{aligned}
&\nabla u_0 u_2 + \nabla u_2 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_2) + \frac{1}{\rho}\nabla p_2 + r u_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&\operatorname{div} u_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&u_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\
&u_2 = -\nabla u_0 \Phi s \quad \text{sur } \gamma,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

et enfin, (u_3, p_3, s) solution de

$$
\begin{aligned}
&\nabla u_0 u_3 + \nabla u_3 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_3) + \frac{1}{\rho}\nabla p_3 + r u_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&\operatorname{div} u_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&u_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\
&u_3 = r\Phi s \quad \text{sur } \gamma,\\
&\big(\mathrm{K} + r^2\mathrm{M} + \mathrm{B}^0\big)s + \int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}}\sigma(u_1, p_1)n \,\mathrm{d}a + \int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}}\sigma(u_2, p_2)n \,\mathrm{d}a + \int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}}\sigma(u_3, p_3)n \,\mathrm{d}a\\
&\quad = \mathrm{M}(h + rg).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Concernant la solvabilité des problèmes (5) et (6), on a le résultat suivant :

LEMME 3.1. – *Soit* $s \in \mathbb{C}^N$. *Pour* $r \geqslant 3\|\varepsilon(u_0)\|_{0,\infty,\Omega^f}$ *les problèmes* (5) *et* (6) *ont une unique solution dans* $\mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathrm{L}^2_0(\Omega^f)$.

Le lemme précédent permet de déterminer complètement (u_1, p_1) à partir des données f et g, on peut donc passer $\int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}}\sigma(u_1, p_1)n \,\mathrm{d}a$, au second membre de $(7)_5$, et il ne nous reste qu'à déterminer (u_2, p_2) et (u_3, p_3, s). Du à la linéarité de $\int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}}\sigma(u_2, p_2)n \,\mathrm{d}a$, par rapport à (u_2, p_2), et de (u_2, p_2) par rapport à s, on peut écrire $\int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}}\sigma(u_2, p_2)n \,\mathrm{d}a$, comme une fonction linéaire de s, c'est-à-dire,

$$
\int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}}\sigma(u_2, p_2)n \,\mathrm{d}a = \mathrm{F}(r)s,
\tag{8}
$$

où $\mathrm{F}(r)$ est une matrice réelle, d'ordre N, associée au problème (6) et donnée par l'expression : $\mathrm{F}_{ij}(r) = \int_\gamma \big(\sigma(w_j, q_j)n\big) \cdot \varphi_i \,\mathrm{d}a$, où (w_j, q_j) est l'unique solution, d'après le lemme 3.1, du problème purement fluide

$$
\begin{aligned}
&\nabla u_0 w_j + \nabla w_j u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(w_j) + \frac{1}{\rho}\nabla q_j + r w_j = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&\operatorname{div} w_j = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&w_j = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\
&w_j = -\nabla u_0 \varphi_j \quad \text{sur } \gamma
\end{aligned}
\tag{9}
$$

pour $j = 1, \ldots, N$.

Remarque 3. – L'expression (8) est cruciale dans la suite de notre approche, et ceci justifie en partie le fait d'avoir admis un comportement réduit de la structure, car dans un cas plus général, où par exemple le déplacement de la structure vérifie les équations linéaires de l'élastodynamique, notre démarche n'est plus valable.

Dans la suite on aura besoin d'une borne pour la norme de la matrice $\mathrm{F}(r)$.

LEMME 3.2. – *Soit* $\tilde{r} > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$. *Pour* $r \geqslant \tilde{r}$ *on a* $\|\mathrm{F}(r)\| \leqslant C_1(1+\sqrt{r}+r)$, *avec* $C_1 > 0$ *une constante qui ne dépend que de* ρ, ν, u_0, $\tilde{r}$, Φ *et* Ω^f.

Reprenons maintenant le problème de la détermination de (u_2, p_2) et (u_3, p_3, s). D'après (8) on peut éliminer (u_2, p_2) dans $(7)_5$ et le problème se réduit à trouver $(u_3, p_3, s) \in \mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathrm{L}^2_0(\Omega^f) \times \mathbb{C}^N$ vérifiant

$$\begin{aligned}
&\nabla u_0 u_3 + \nabla u_3 u_0 - 2\nu \operatorname{div}\varepsilon(u_3) + \frac{1}{\rho}\nabla p_3 + r u_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&\operatorname{div} u_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega^f,\\
&u_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\
&u_3 = r\Phi s \quad \text{sur } \gamma,\\
&\big(\mathrm{K} + r^2\mathrm{M} + \mathrm{B}^0 + \mathrm{F}(r)\big)s + \int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}}\sigma(u_3, p_3)n\,\mathrm{d}a = \mathrm{M}(h + rg) - \int_\gamma \Phi^{\mathrm{T}}\sigma(u_1, p_1)n\,\mathrm{d}a.
\end{aligned} \tag{10}$$

D'après le lemme 3.2 on tire le résultat suivant :

LEMME 3.3. – *Il existe* $r > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$ *tel que le problème couplé* (10) *a une unique solution.*

Les lemmes précédents permettent de démontrer l'existence et l'unicité de solutions du problème (4).

THÉORÈME 3.4. – *Il existe* $r > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$ *tel que le problème* (4) *admet une unique une solution* $(u, p, s) \in \mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathrm{L}^2_0(\Omega^f) \times \mathbb{C}^N$. *De plus, on a l'estimation* $\|s\| + |u|_{1,\Omega^f} + \|p\|_{0,\Omega^f} \leqslant C_2\big(\|f\|_{0,\Omega^f} + \|g\| + \|h\|\big)$, *où* $C_2 > 0$ *est une constante indépendante de* (u, p, s) *et* (f, g, h).

D'après le théorème 3.4, l'opérateur T est bien défini, linéaire et continu de $\mathbb{H}$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$. D'autre part, comme l'injection de $\mathrm{H}^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{H}$ est compacte, de la continuité de T, on déduit la compacité de T comme opérateur de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$. Ceci permet d'appliquer la théorie spectrale des opérateurs compacts [1]. On peut donc démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.5. – *Les valeurs propres du problème couplé* (2) *sont, au plus, en infinité dénombrable, de multiplicité finie et ne peuvent s'accumuler qu'à l'infini.*

4. Conclusion

Dans ce travail nous avons caractérisé les valeurs et vecteurs propres du nouveau problème spectral (2), issu de l'analyse de stabilité de systèmes en interaction fluide-structure. Notre approche s'appuie sur la définition d'un certain opérateur compact agissant sur un espace de Hilbert. Ce résultat concorde avec celui obtenu dans [2], pour un cas particulier de (2), et celui conjecturé dans [3] pour un autre cas particulier de (2).

Références bibliographiques

[1] Akhiezer N.I., Glazman I.M., Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover, New York, 1993.
[2] Conca C., Duran M., Planchard J., A quadratic eigenvalue problem involving Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 100 (3) (1992) 295–313.
[3] Conca C., Planchard J., Thomas B., Vanninatahn M., Problèmes mathématiques en couplage fluide-structure, Eyrolles, Paris, 1994.
[4] Dautray R., Lions J.L., Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
[5] Fanion T., Fernández M.A., Le Tallec P., Deriving adequate formulations for fluid-structure interactions problems: from ALE to transpiration, Rév. Européenne Élém. Finis 9 (6–7) (2000) 681–708.
[6] Fernández M.A., Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure, Ph.D. thesis, Université de Paris IX, 2001.
[7] Fernández M.A., Le Tallec P., Linear fluid-structure stability analysis with transpiration (en préparation).
[8] Girault V., Raviart P.A., Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[9] Planchard J., Thomas B., On the dynamical stability of cylinders placed in cross-flow, J. Fluid Structures 7 (1993) 321–339.