C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 93–96

Logique/*Logic*

Modèle relationnel de la logique linéaire du second ordre

Alexandra Bruasse-Bac

Institut de mathématiques de Luminy, CNRS UPR 9016, 163, avenue de Luminy, case 930, 13288 Marseille cedex 09, France

Reçu le 21 novembre 2001 ; accepté le 3 décembre 2001

Note présentée par Jean-Yves Girard.

Résumé On construit un modèle purement relationnel de la logique linéaire du second ordre. En l'absence de toute notion de cohérence, on s'attachera tout particulièrement à établir un théorème de forme normale qui permettra d'interpréter les quantificateurs du second ordre. Pour citer cet article : A. Bruasse-Bac, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 93–96. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Relational model of second order linear logic

Abstract We define a purely relational model of second order linear logic. In the absence of any notion of coherence, we will especially concentrate on establishing a normal form theorem that will give rise to the interpretation of the second order quantifiers. To cite this article: A. Bruasse-Bac, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 93–96. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Introduction

Le modèle relationnel de la logique linéaire (LL) est probablement l'un de ses modèles dénotationnels les plus simples. Les formules y sont interprétées par des ensembles et les preuves par des relations. Dans [3], Bucciarelli et Ehrhard ont cependant montré que, sous son apparente simplicité, ce modèle pouvait constituer le socle d'un travail sur la complétude dénotationnelle (étude conduisant notamment à la notion de logique linéaire indexée et à toute une famille de modèles dénotationnels non uniformes de LL).

Dans [4], Girard construit un modèle cohérent du système F dans lequel un théorème de forme normale garantit une représentation finitaire des preuves. Cependant, la structure cohérente est absolument indissociable de ce modèle (elle est, entre autre, un ingrédient indispensable à la définition de la composition des morphismes). La question de savoir s'il était possible de définir un modèle relationnel de la logique linéaire du second ordre (LL^2) était donc ouverte et, à cette question, était subordonnée toute tentative d'extension du travail de Bucciarelli et Ehrhard au second ordre.

Adresse e-mail : bac@iml.univ-mrs.fr (A. Bruasse-Bac).

S1631-073X(02)02229-X/FLA

1. Formules et foncteurs stables

Rappelons que dans le modèle relationnel de la logique linéaire, une formule A est interprétée par un ensemble A^* et que toute preuve π de A est interprétée par un sous-ensemble π^* de A^*. L'idée la plus simple pour étendre cette sémantique au second ordre est alors la suivante : si A est une formule de LL^2 ayant une variable du second ordre $\mathbf{X}$ libre, A^* devrait se comporter comme une opération qui à tout ensemble X associe un ensemble $A^*(X)$. Par ailleurs, pour des questions de « polymorphisme » pour les variables du second ordre, la fonction A^* doit être « compatible » avec l'opération de renommage des éléments de X, ce qui conduit à interpréter les formules de LL^2 par des *foncteurs n-aires de $\mathcal{I}^n$ dans $\mathcal{I}$* (où $\mathcal{I}$ désigne la *catégorie des ensembles et injections*).

Dans la suite, $\mathcal{I}^n$ désignera la catégorie dont les objets sont des n-uplets d'ensembles et les morphismes des n-uplets d'injections. Etant donnés $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux n-uplets d'ensembles, on dira que $(X_1, \ldots, X_n)$ est *inclus* dans $(Y_1, \ldots, Y_n)$ (que l'on notera $(X_1, \ldots, X_n) \subseteq (Y_1, \ldots, Y_n)$) lorsque pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $X_i \subseteq Y_i$.

Étant donnés E et F deux ensembles, on note $E + F$ l'union disjointe de E et F définie par $E + F = (\{1\} \times E) \cup (\{2\} \times F)$. Par ailleurs, étant donné un ensemble X, on notera $\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(X)$ l'ensemble des multiensembles finis sur X, et $[a_1, \ldots, a_n]$ le multiensemble dont les éléments sont $a_1, \ldots, a_n$.

Afin d'obtenir une représentation finitaire des preuves, il est alors essentiel d'exiger une condition de stabilité des foncteurs.

DÉFINITION 1. – Soit $T : \mathcal{I}^n \to \mathcal{I}$ un foncteur n-aire. On dira que T est un *foncteur stable* lorsque
(i) T préserve les inclusions,
(ii) T préserve les unions filtrantes (hypothèse de continuité),
(iii) T préserve les intersections finies (hypothèse de stabilité).

Grâce à l'hypothèse de préservation des inclusions, on peut montrer qu'un foncteur n-aire T est stable si et seulement s'il préserve les *petites limites filtrantes* et les *produits fibrés*. On obtient le théorème de forme normale suivant.

THÉORÈME 2 (théorème de forme normale). – *Soit $T : \mathcal{I}^n \to \mathcal{I}$ un foncteur stable, soient $X_1, \ldots, X_n$ des ensembles et soit $a \in T(X_1, \ldots, X_n)$. Il existe une unique famille d'ensembles finis $(X_0^i \subseteq X_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ telle que* :
(i) *$a \in T(X_0^1, \ldots, X_0^n)$,*
(ii) *pour toute famille d'ensembles $(Y_1, \ldots, Y_n)$, si $a \in T(Y_1, \ldots, Y_n)$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $X_0^i \subseteq X_i$.*
De plus, la famille $(X_0^1, \ldots, X_0^n)$ ne dépend que du point a et du foncteur T (et pas de $(X_1, \ldots, X_n)$).

La suite $(X_0^1, \ldots, X_0^n, a)$ est alors appelée *forme normale canonique* de a. L'existence d'une forme normale canonique (et pas seulement de formes normales comme dans [4]) provient de l'hypothèse de préservation des inclusions. C'est un point central de notre modèle qui conduit à une vision quasi-syntaxique des foncteurs stables. Dans [2], on exploite cette propriété pour construire un système de logique linéaire indexée du second ordre.

Étant donné un foncteur stable n-aire $T : \mathcal{I}^n \to \mathcal{I}$, on appellera *pré-trace n-aire de T* la classe de toutes les formes normales canoniques relativement au foncteur T (nous la noterons $\check{\mathfrak{T}}(T)$).

Toute formule de la logique linéaire propositionnelle est interprétée par un foncteur stable au moyen des constructions suivantes. Étant donnés S et T deux foncteurs stables n-aires, on pose :

$$\begin{cases} (S \times T)(\vec{X}) = S(\vec{X}) \times T(\vec{X}) & (\text{où } \vec{X} \text{ est une suite d'ensembles}) \\ (S \times T)(\vec{f})(a, b) = \big(S(\vec{f})(a), T(\vec{f})(b)\big) & (\text{où } (f_i : X_i \hookrightarrow Y_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}} \text{ et } (a, b) \in S(\vec{X}) \times T(\vec{X})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (S+T)\big(\vec{X}\big) = S\big(\vec{X}\big) + T\big(\vec{X}\big) & \text{(où } \vec{X} \text{ est une suite d'ensembles)} \\ (S+T)\big(\vec{f}\,\big)(1,a) = \big(1, S\big(\vec{f}\,\big)(a)\big) & \text{(où } (f_i : X_i \hookrightarrow Y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \text{ et } a \in S\big(\vec{X}\big)) \\ (S+T)\big(\vec{f}\,\big)(2,b) = \big(2, T\big(\vec{f}\,\big)(a)\big) & \text{(où } (f_i : X_i \hookrightarrow Y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \text{ et } b \in T\big(\vec{X}\big)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (!S)\big(\vec{X}\big) = \mathcal{M}_{\text{fin}}\big(S\big(\vec{X}\big)\big) & \text{(où } \vec{X} \text{ est une suite d'ensembles)} \\ (!S)\big(\vec{f}\,\big)\big[a_1,\dots,a_n\big] = \big[S\big(\vec{f}\,\big)(a_1),\dots,S\big(\vec{f}\,\big)(a_n)\big] & \text{(où } (f_i : X_i \hookrightarrow Y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}} \text{ et} \\ & \big(a_i \in S\big(\vec{X}\big)\big)_{i\in\{1,\dots,n\}}) \end{cases}$$

Les foncteurs ainsi définis sont des foncteurs stables interprétant respectivement les constructions multiplicatives ($\otimes$, $\wp$ et $\multimap$), additives ($\oplus$ et &) et exponentielles (! et ?) de la logique linéaire.

2. Preuves et objets de type variable

Comme nous l'avons rappelé, si π est une preuve d'une formule A, alors l'interprétation de π dans le modèle relationnel de LL est un sous-ensemble de A^*. Dès lors, si A comporte une variable libre du second ordre **X**, on est amené à interpréter π comme une famille $(\pi^*_X \subseteq A^*(X))_{X\in\mathcal{I}}$. La condition de « compatibilité avec le renommage » conduit, comme dans [4], à la définition suivante.

DÉFINITION 3. – Soit $T : \mathcal{I}^n \to \mathcal{I}$ un foncteur stable. Un *objet de type variable* T est une famille $t = (t_{\vec{X}} \subseteq T(\vec{X}))_{\vec{X}\in\mathcal{I}^n}$ satisfaisant la *condition de mutilation* suivante : étant donnée $(f_i : X_i \hookrightarrow Y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille d'injections, on a

$$t_{\vec{X}} = T\big(\vec{f}\,\big)^{-1}(t_{\vec{Y}}).$$

Étant donnés S et T deux foncteurs stables n-aires, on définit les morphismes de S vers T comme les objets de type variable $S \multimap T$. Afin d'interpréter la règle de coupure, il faut être capable de composer ces morphismes. Étant donnés $s : S \multimap T$ et $t : R \multimap S$ deux objets de type variable (avec R, S et T des foncteurs stables unaires), la famille $(t_X \circ s_X)_{X\in\mathcal{I}}$ (où $t_X \circ s_X$ désigne la composée relationnelle de t_X et s_X) ne vérifie pas nécessairement la propriété de mutilation contrairement à ce qui se passait dans [4] (*voir* [1] pour un contre-exemple). En fait, le problème majeur est que contrairement à ce qui se passait dans le modèle du système F de Girard, on ne peut plus s'appuyer sur la notion de cohérence pour composer les morphismes. Nous allons donner une définition de la composition qui se comporte bien dans le cadre ensembliste.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la catégorie **VRel**$[n]$ comme suit :

- les *objets* de **VRel**$[n]$ sont les foncteurs stables n-aires de $\mathcal{I}^n$ dans $\mathcal{I}$;
- si S et T sont des objets de **VRel**$[n]$, les *morphismes* de S dans T de **VRel** sont les objets de type variable $S \multimap T$.

Étant donné T un foncteur stable n-aire, on définit l'identité de T par,

$$(\mathrm{Id}_T)_{X_1,\dots,X_n} = \big\{(a,a);\ a \in T(X_1,\dots,X_n)\big\}$$

pour toute famille d'ensembles $X_1,\dots,X_n$.

Si R, S et T sont des foncteurs stables n-aires et que $s : R \multimap S$ et $t : S \multimap T$ sont des objets de type variable, alors on définit *la composée* $t \circ s$ par :

$(a,c) \in (t \circ s)_{X_1,\dots,X_n}$ si et seulement s'il existe une famille d'ensembles $Y_1,\dots,Y_n$, une famille d'injections $(f_i : X_i \hookrightarrow Y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et un élément $b \in S(Y_1,\dots,Y_n)$ tel que

$$\big(R(f_1,\dots,f_n)(a), b\big) \in t_{Y_1,\dots,Y_n} \quad \text{et} \quad \big(b, T(f_1,\dots,f_n)(c)\big) \in s_{Y_1,\dots,Y_n}.$$

On vérifie qu'avec cette définition,[1] la composée de deux objets de type variable est bien un objet de type variable (en fait, $t \circ s$ est le plus petit objet de type variable $R \multimap T$ contenant $(t_{\vec{X}} \circ s_{\vec{X}})_{\vec{X}\in\mathcal{I}}$), et on prouve (*voir* [1]) que **VRel**$[n]$ est un modèle catégorique de la logique linéaire propositionnelle.

3. Le second ordre

Nous allons maintenant interpréter les quantificateurs. Soit $\Phi : \mathbf{VRel}[n] \to \mathbf{VRel}[n+1]$ le *foncteur d'oubli* dont la partie objet est définie par $\Phi(T)(X_1, \ldots, X_{n+1}) = T(X_1, \ldots, X_n)$ et $\Phi(T)(f_1, \ldots, f_{n+1}) = T(f_1, \ldots, f_n)$ (et de même pour la partie morphisme). Le problème de l'interprétation du second ordre consiste à montrer que le foncteur Φ admet un adjoint à droite $\mathfrak{T} : \mathbf{VRel}[n+1] \to \mathbf{VRel}[n]$ (et donc aussi un adjoint à gauche).

Etant donné $T : \mathcal{I}^{n+1} \to \mathcal{I}$ un foncteur stable $n+1$-aire et $X_1, \ldots, X_n$ une suite d'ensembles, on note $T_{X_1,\ldots,X_n}$ le foncteur stable unaire défini par $T_{X_1,\ldots,X_n}(Y) = T(X_1, \ldots, X_n, Y)$ et $T_{X_1,\ldots,X_n}(f) = T(X_1, \ldots, X_n, f)$.

DÉFINITION 4. – Soit $T : \mathcal{I}^{n+1} \to \mathcal{I}$ un foncteur stable $(n+1)$-aire. Étant donnée $(X_i \in \mathcal{I})_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille d'ensembles, on définit la relation d'équivalence $\sim_{T_{\vec{X}}}$ sur $\check{\mathfrak{T}}(T_{X_1,\ldots,X_n})$ par : $(X, a) \sim_{T_{\vec{X}}} (Y, b)$ si il existe une bijection $\sigma : X \stackrel{\sim}{\to} Y$ telle que $a = T_{X_1,\ldots,X_n}(\sigma)(b)$.

On définit la *trace* de T comme l'opération qui à une famille d'ensembles $(X_i \in \mathcal{I})_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ associe le quotient

$$\mathfrak{T}(T)(X_1, \ldots, X_n) = {\check{\mathfrak{T}}(T_{X_1,\ldots,X_n})}/{\sim_{T_{\vec{X}}}}.$$

On montre ensuite que cette opération de trace s'étend en fait aux morphismes (*voir* [1]) en un foncteur stable $\mathfrak{T}(T) : \mathcal{I}^n \to \mathcal{I}$.

PROPOSITION 5. – *Soit $T : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ un foncteur stable unaire. Il y a une correspondance canonique et bijective entre* :
(i) *les objets de type variable T,*
(ii) *les sous-ensembles de $\mathfrak{T}(T)$.*

Cette correspondance associe à un objet t de type variable T sa trace notée $\mathfrak{T}(t)$. On peut donc étendre $\mathfrak{T}$ en un foncteur de $\mathbf{VRel}[n+1]$ dans $\mathbf{VRel}[n]$.

THÉORÈME 6. – *Le foncteur $\mathfrak{T}$ est l'adjoint à droite de Φ.*

Par conséquent, les catégories $\mathbf{VRel}[n]$ définissent bien un *modèle de la logique linéaire du second ordre*. Sur la base de ce modèle, on construit, d'une part une extension au second ordre $\mathrm{LL}^2(I)$ du système $\mathrm{LL}(I)$ (*voir* [2]), et d'autre part une famille de sémantiques dénotationnelles non uniformes de LL^2 (*voir* [1]).

---

[1] Dans le cadre des espaces cohérents, cette définition coïncide avec la composition de Girard.

Références bibliographiques

[1] Bruasse-Bac A., On phase semantics and denotational semantics: the second order, Prépublication IML n° 2000-29.
[2] Bruasse-Bac A., Logique linéaire indexée du second ordre, Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 2001.
[3] Bucciarelli A., Ehrhard T., On phase semantics and denotational semantics: the exponentials, Ann. Pure Appl. Logic (2000).
[4] Girard J.Y., The system *F* of variable types: fifteen years later, Theoret. Comput. Sci. (1986).
[5] Girard J.Y., Lafont Y., Taylor P., Proofs and Types, Cambridge University Press, 1989.