Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 125–128

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse complexe/Géométrie analytique

Sur l'algébrisabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques de $\mathbb{C}^n$

On the local algebraizibility of real analytic generic submanifolds in $\mathbb{C}^n$

Hervé Gaussier, Joël Merker

LATP, UMR 6632, Université de Provence, 39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France

Reçu le 12 novembre 2002 ; accepté le 19 novembre 2002

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

On établit que le (pseudo)groupe local des biholomorphismes stabilisant une sous-variété algébrique réelle, minimale, finiment non dégénérée de $\mathbb{C}^n$, est un groupe de Lie local algébrique réel. On en déduit des conditions nécessaires pour l'algébrisabilité locale de tubes analytiques réels rigides de codimension quelconque dans $\mathbb{C}^n$. ***Pour citer cet article : H. Gaussier, J. Merker, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We prove that the local (pseudo)group of biholomorphisms stabilizing a minimal, finitely nondegenerate real algebraic submanifold in $\mathbb{C}^n$ is a real algebraic local Lie group. We deduce necessary conditions for the local algebraizability of real analytic rigid tubes of arbitrary codimension in $\mathbb{C}^n$. ***To cite this article: H. Gaussier, J. Merker, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Introduction

Une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$ est dite *algébrique* (au sens de Nash, cf. [2]) si elle est définie localement par l'annulation de polynômes réels et *localement algébrisable* en un de ses points p s'il existe un système de coordonnées holomorphes locales centré en p dans lequel elle est algébrique. S'il est clair que toute sous-variété analytique réelle de dimension k dans $\mathbb{R}^{2n}$ est localement équivalente, par une transformation analytique réelle, à un plan de dimension k, il n'en va pas de même pour l'algébrisabilité au moyen d'une transformation holomorphe. Huang, Ji et Yau ont récemment présenté dans [7] le premier exemple explicite

Adresses e-mail : gaussier@cmi.univ-mrs.fr (H. Gaussier), merker@cmi.univ-mrs.fr (J. Merker).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(02)00020-1

$\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\colon\ \operatorname{Im} w=\exp(z\bar z)\}$ d'une hypersurface analytique réelle Levi non dégénérée de $\mathbb{C}^2$, algébrisable en aucun de ses points. La démonstration dans [7] repose sur la méthode dite d'équivalence due à Cartan [3] et développée par Chern et Moser [4] pour classifier les hypersurfaces strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ au moyen d'invariants différentiels. La complexité des calculs formels ne permet apparemment pas de dégager une obstruction concrète de non algébrisabilité locale, partagée par tous les éléments d'une famille de sous-variétés de dimension quelconque dans $\mathbb{C}^n$.

On présente dans cette Note des conditions nécessaires d'algébrisabilité locale de sous-variétés analytiques réelles génériques de $\mathbb{C}^n$. L'argument clé consiste à observer que le (pseudo)groupe des biholomorphismes locaux de $\mathbb{C}^n$ stabilisant une sous-variété générique algébrique réelle est, sous certaines hypothèses de non dégénérescence, un groupe de Lie local pour lequel la loi de multiplication est algébrique.

2. Énoncé des résultats

Soit M une sous-variété analytique réelle locale de codimension d dans $\mathbb{C}^n$, passant par l'origine, définie par les équations $r_k(t,\bar t)=0$ pour $k=1,\dots,d$, où $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{C}^n$ et où les $r_k(t,\bar t)\in\mathbb{C}\{t,\bar t\}$ satisfont $r_k(0,0)=0$, $r_k(t,\bar t)\equiv\overline{r_k(t,\bar t)}$ et $\mathrm{d}r_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}r_d(0)\neq 0$. On suppose M *générique*, c'est-à-dire que $T_0M+\mathrm{i}T_0M=T_0\mathbb{C}^n$. Dans ce cas, $T^{(0,1)}M:=T_0M\cap T^{(0,1)}\mathbb{C}^n$ est un fibré complexe de rang $n-d$. Soit $\bar L_1,\dots,\bar L_{n-d}$ une base de $T^{(0,1)}M$. On dit que M est *minimale en* 0 si l'orbite (au sens de Sussmann) de l'origine sous l'action des champs $\operatorname{Re}\bar L_1,\operatorname{Im}\bar L_1,\dots,\operatorname{Re}\bar L_{n-d},\operatorname{Im}\bar L_{n-d}$ contient un voisinage de l'origine dans M. On dit que M est *holomorphiquement non dégénérée* (cf. [9]) s'il n'existe pas de champ de vecteurs non nul de type $(1,0)$, à coefficients holomorphes, tangent à M. Dans ce cas, d'après [1], il existe un sous-ensemble analytique réel strict V de M tel que, pour tout point p de $M\backslash V$, on a $\operatorname{Vect}\{\bar L^\beta\,\nabla_t(r_k)(p,\bar p)\colon\ \beta\in\mathbb{N}^{n-d},\ k=1,\dots,d\}=\mathbb{C}^n$, où l'on note $\nabla_t(r_k)(t,\bar t)$ le gradient holomorphe de r_k et $\bar L^\beta:=(\bar L_1)^{\beta_1}\dots(\bar L_{n-d})^{\beta_{n-d}}$. On dit alors que M est *finiment non dégénérée en* p.

On étudie la structure du (pseudo)groupe des biholomorphismes locaux de $\mathbb{C}^n$ stabilisant M. Ce groupe est de dimension infinie lorsque M n'est nulle part minimale ou holomorphiquement dégénérée (cf. [9]). La notion de *groupe de Lie local* (de dimension finie) est présentée par exemple dans le Chapitre 8 de [10]. On appelle *groupe de Lie local algébrique* un groupe de Lie local pour lequel la loi de multiplication (cf. [10, pp. 176–177]) est algébrique (au sens de Nash).

Théorème 1. *Soit M une sous-variété générique algébrique réelle de $\mathbb{C}^n$, passant par l'origine, minimale et finiment non dégénérée en* 0. *Il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, les trois conditions suivantes sont satisfaites* :

(a) *Le* (*pseudo*)*groupe G_M des biholomorphismes locaux de $\mathbb{C}^n$ définis sur le polydisque $\Delta_n(0,\varepsilon)$ et stabilisant M est un groupe de Lie local algébrique réel de dimension finie m ne dépendant que de la géométrie locale de M au voisinage de l'origine.*

(b) *Il existe $0<\varepsilon'<\varepsilon$ et une application* algébrique *H_M, constructible algorithmiquement à partir des équations définissantes de M, définie au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, vérifiant $H_M(t,0)\equiv t$, et telle que toute application holomorphe $h:\Delta_n(0,\varepsilon')\to\ \Delta_n(0,\varepsilon)$ suffisamment proche de l'identité, stabilisant M, vérifie $h=H_M(.,e_h)$ pour un unique $e_h\in\mathbb{R}^m$.*

(c) *L'application $(t,e)\mapsto H_M(t,e)$ définit un groupe de Lie local algébrique de biholomorphismes algébriques stabilisant M.*

La démonstration du Théorème 1 fait intervenir les jets en 0 de biholomorphismes locaux, voir [6].

On considère maintenant la famille $\mathcal{T}_n^d$ des sous-variétés analytiques réelles génériques de $\mathbb{C}^n$, définies au voisinage de l'origine, de codimension d, minimales et finiment non dégénérées en 0, dont le groupe G_M est commutatif, de dimension n. Il existe alors, pour tout élément M de $\mathcal{T}_n^d$, un système local de coordonnées holomorphes centré à l'origine $(z, w) = (x + \mathrm{i}y, u + \mathrm{i}v) \in \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^d$ et d fonctions analytiques réelles $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ s'annulant en 0, tels que M soit représenté au voisinage de 0 par les équations $v_1 = \varphi_1(y), \ldots, v_d = \varphi_d(y)$. Dans ce cas, M est finiment non dégénéré en 0 si et seulement s'il existe $n - d$ multiindices $\beta^1, \ldots, \beta^{n-d} \in \mathbb{N}^{n-d}$ de longueur strictement positive et des entiers $1 \leqslant k_1, \ldots, k_{n-d} \leqslant d$ tels que l'application réelle

$$\psi(y) := \left(\frac{\partial^{|\beta^1|}\varphi_{k_1}(y)}{\partial y^{\beta^1}}, \ldots, \frac{\partial^{|\beta^{n-d}|}\varphi_{k_{n-d}}(y)}{\partial y^{\beta^{n-d}}}\right) \tag{1}$$

est de rang $n - d$ à l'origine dans $\mathbb{R}^{n-d}$ (cf. [6, Lemme 3.2]). On note $y' \mapsto (\psi_1'(y'), \ldots, \psi_{n-d}'(y'))$ l'application réciproque de ψ. Le second résultat de cette Note est le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit M appartenant à $\mathcal{T}_n^d$, définie par les équations $v_1 = \varphi_1(y), \ldots, v_d = \varphi_d(y)$, minimale et finiment non dégénérée en* 0. *Si M est localement algébrisable à l'origine, les dérivées partielles $\partial\psi_j'/\partial y_l'$ sont algébriques réelles pour $1 \leqslant j, l \leqslant n - d$.*

Le Théorème 2 montre qu'un élément de $\mathcal{T}_n^d$ pour lequel une dérivée $\partial\psi_j'/\partial y_l'$ n'est pas algébrique réelle (ce qui est génériquement le cas au sens de Baire) n'est pas localement algébrisable à l'origine. Le Corollaire 1 exhibe une famille explicite d'exemples de sous-variétés analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$, qui ne sont pas localement algébrisables à l'origine :

Corollaire 1 [6]. (a) *Soient $\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$ des fonctions analytiques réelles arbitraires, définies au voisinage de* $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$. *L'hypersurface M de $\mathbb{C}^n$ d'équation* $v = \sum_{k=1}^{n-1}[y_k^2 + y_k^6 + y_k^9 y_1 \cdots y_{k-1} + y_k^{n+8}\chi_k(y_1, \ldots, y_{n-1})]$ *appartient à la famille $\mathcal{T}_n^1$. De plus, pour un choix générique* (*au sens de Baire*) *de $\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$, M n'est pas localement algébrisable à l'origine.*

(b) *Les hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$ d'équations* $v = \sin(y^2)$, $v = \sinh(y^2)$ *et* $v = \exp(\exp(y) - 1) - 1$ *appartiennent à $\mathcal{T}_2^1$ et ne sont pas localement algébrisables à l'origine.*

Pour vérifier l'appartenance de M à la famille $\mathcal{T}_n^1$, on utilise la théorie analytique des symétries des équations aux dérivées partielles (cf. [8, Chapitre 2]), appliquée à la géométrie CR dans [11,5].

Dans le même état d'esprit, le théorème suivant donne un éclairage différent du résultat de [7] :

Théorème 3 [6]. *Soit $M : v = \varphi(z\bar{z})$ une hypersurface analytique réelle, Levi non dégénérée dans $\mathbb{C}^2$, passant par l'origine, dont l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux est engendrée par $\partial/\partial w$ et* $\mathrm{i}z\partial/\partial z$. *Si M est localement algébrisable à l'origine, la dérivée de φ est algébrique. Ainsi, les hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$ d'équations* $v = \mathrm{e}^{z\bar{z}} - 1$, $v = \sin(z\bar{z})$ *et* $v = \sinh(z\bar{z})$ *ne sont pas localement algébrisables à l'origine.*

3. Résumé de la démonstration du Théorème 2

Soit $M \in \mathcal{T}_n^d$ et soit Φ un biholomorphisme local, vérifiant $\Phi(0) = 0$, tel que $M' := \Phi(M)$ est algébrique, minimale et finiment non dégénérée en 0. L'algèbre de Lie réelle des automorphismes infinitésimaux de M étant engendrée par les champs $\partial/\partial t_1, \ldots, \partial/\partial t_n$, l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de M' est commutative, de dimension n, engendrée par les champs $X_1' = \Phi_*(\partial/\partial t_1), \ldots, X_n' = \Phi_*(\partial/\partial t_n)$. On commence par redresser algébriquement les feuilletages holomorphes induits par $X_1', \ldots, X_n'$, en utilisant l'algébricité de l'application $H_{M'}$ et la commutativité du groupe $G_{M'}$ données dans le Théorème 1. La démonstration est standard, voir [6].

Proposition 1. *Il existe un biholomorphisme algébrique complexe Ψ, défini au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, et n fonctions algébriques complexes $c_1, \ldots, c_n$, vérifiant $c_j(0) = 1$, tels que l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de $M'' := \Psi(M')$ est engendrée par les champs $X_j'' := \Psi_*(X_j') = c_j(t_j)\partial/\partial t_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$.*

D'après [4], il existe des coordonnées $t = (z_1, \ldots, z_{n-d}, w_1, \ldots, w_d)$ dans lesquelles on peut représenter M'' par les équations $w_k = \overline{\Theta}_k(z, \bar{z}, \bar{w})$, $k = 1, \ldots, d$, où $\overline{\Theta}_k$ est une fonction algébrique complexe. On note maintenant, $(\Psi \circ \Phi)^{-1} = (f_1, \ldots, f_{n-d}, g_1, \ldots, g_d)$ et $(c_1, \ldots, c_n) = (a_1, \ldots, a_{n-d}, b_1, \ldots, b_d)$. L'application $\Psi \circ \Phi$ vérifiant $(\Psi \circ \Phi)_*(\partial/\partial t_j) = c_j(t_j)\partial/\partial t_j$, on a les identités $a_j(z_j)(\partial f_j/\partial z_j)(z_j) \equiv b_k(w_k)(\partial g_k/\partial w_k)(w_k) \equiv 1$, ce qui montre que $\partial f_j/\partial z_j$ et $\partial g_k/\partial w_k$ sont algébriques pour $1 \leqslant j \leqslant n-d$ et $1 \leqslant k \leqslant d$. La condition $(\Psi \circ \Phi)(M) = M''$ donne, pour $k = 1, \ldots, d$, les identités suivantes dans $\mathbb{C}\{z, \bar{z}, \bar{w}\}$:

$$\frac{g_k(\overline{\Theta}_k(z, \bar{z}, \bar{w})) - \bar{g}_k(\bar{w}_k)}{2\mathrm{i}} \equiv \varphi_k\left(\frac{f_1(z_1) - \bar{f}_1(\bar{z}_1)}{2\mathrm{i}}, \ldots, \frac{f_{n-d}(z_{n-d}) - \bar{f}_{n-d}(\bar{z}_{n-d})}{2\mathrm{i}}\right). \tag{2}$$

Pour $1 \leqslant l \leqslant n-d$, on applique l'opérateur $\partial^{|\beta^l|}/\partial z^{\beta^l}$ à Eq. (2) avec $k = k_l$. Il existe des fonctions algébriques réelles A_{k_l,β^l} vérifiant :

$$A_{k_l,\beta^l}(z, \bar{z}) \equiv \frac{\partial^{|\beta^l|}\varphi_{k_l}}{\partial y^{\beta^l}}\left(\frac{f_1(z_1) - \bar{f}_1(\bar{z}_1)}{2\mathrm{i}}, \ldots, \frac{f_{n-d}(z_{n-d}) - \bar{f}_{n-d}(\bar{z}_{n-d})}{2\mathrm{i}}\right). \tag{3}$$

L'application ψ donnée par Éq. (1) étant de rang $n-d$, on obtient pour $j = 1, \ldots, n-d$ l'identité $f_j(z_j) - \bar{f}_j(\bar{z}_j) \equiv 2\mathrm{i}\,\psi'_j(A_{k_1,\beta^1}(z, \bar{z}), \ldots, A_{k_{n-d},\beta^{n-d}}(z, \bar{z}))$. La différentiation de cette identité par rapport à z_j et à z_m pour $m \neq j$ fournit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\mathrm{i}a_j(z_j)} \equiv \displaystyle\sum_{l=1}^{n-d} \frac{\partial\psi'_j}{\partial y'_l}\big(A_{k_1,\beta^1}(z, \bar{z}), \ldots, A_{k_{n-d},\beta^{n-d}}(z, \bar{z})\big)\frac{\partial A_{k_l,\beta^l}}{\partial z_j}(z, \bar{z}), \\ 0 \equiv \displaystyle\sum_{l=1}^{n-d} \frac{\partial\psi'_j}{\partial y'_l}\big(A_{k_1,\beta^1}(z, \bar{z}), \ldots, A_{k_{n-d},\beta^{n-d}}(z, \bar{z})\big)\frac{\partial A_{k_l,\beta^l}}{\partial z_m}(z, \bar{z}), \quad m \neq j. \end{cases} \tag{4}$$

Puisque $a_j(0) = 1$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-d$, la matrice $((\partial A_{k_l,\beta^l}/\partial z_j)(0,0))_{1 \leqslant j,l \leqslant n-d}$ est inversible et il existe donc des fonctions algébriques complexes $B_{j,l}(z, \bar{z})$, définies pour $1 \leqslant j, l \leqslant n-d$, telles que $(\partial\psi'_j/\partial y'_l)(A(z, \bar{z})) := (\partial\psi'_j/\partial y'_l)(A_{k_1,\beta^1}(z, \bar{z}), \ldots, A_{k_{n-d},\beta^{n-d}}(z, \bar{z})) \equiv B_{j,l}(z, \bar{z})$. Enfin, la fonction A_{k_l,β^l} étant réelle et la matrice $((\partial A_{k_l,\beta^l}/\partial z_j)(0,0))_{1 \leqslant j,l \leqslant n-d}$ étant inversible, le jacobien à l'origine de l'application $y \mapsto A(\mathrm{i}y, -\mathrm{i}y) =: y'$ est non nul. Il existe donc une application algébrique réelle C telle que $(\partial\psi'_j/\partial y'_l)(y') \equiv B_{j,l}(\mathrm{i}C(y'), -\mathrm{i}C(y'))$, ce qui prouve l'algébricité de $\partial\psi'_j/\partial y'_l$ pour $1 \leqslant j, l \leqslant n-d$.

Références

[1] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, L.P. Rothschild, Rational dependence of smooth and analytic CR mappings on their jets, Math. Ann. 315 (1999) 205–249.

[2] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy, Real Algebraic Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] É. Cartan, Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, I, Ann. Mat. 11 (1932) 17–90 ; II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1 (1932) 333–354.

[4] S.S. Chern, J.K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 133 (2) (1974) 219–271.

[5] H. Gaussier, J. Merker, A new example of uniformly Levi degenerate hypersurface in $\mathbb{C}^3$, Ark. Mat., to appear.

[6] H. Gaussier, J. Merker, Nonalgebraizable real analytic tubes in $\mathbb{C}^n$, Math. Z., to appear.

[7] X. Huang, S. Ji, S.S. Yau, An example of a real analytic strongly pseudoconvex hypersurface which is not holomorphically equivalent to any algebraic hypersurface, Ark. Mat. 39 (1) (2001) 75–93.

[8] P.J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.

[9] N. Stanton, Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces, Amer. J. Math. 118 (1) (1996) 209–233.

[10] O. Stormark, Lie's Structural Approach to PDE Systems, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[11] A. Sukhov, Segre varieties and Lie symmetries, Math. Z. 231 (3) (2001) 483–492.