

# LE LEMME D'ABHYANKAR PERFECTOÏDE

par YVES ANDRÉ

## RÉSUMÉ

Nous étendons le théorème de presque-pureté de Faltings-Scholze-Kedlaya-Liu sur les extensions étales finies d'algèbres perfectoïdes au cas des extensions ramifiées, sans restriction sur le lieu de ramification. Nous déduisons cette version perfectoïde du lemme d'Abhyankar du théorème de presque-pureté, par un passage à la limite mettant en jeu des versions perfectoïdes du théorème d'extension de Riemann. Au préalable, nous développons les aspects catégoriques des algèbres de Banach uniformes et des algèbres perfectoïdes, tout en semant de nouvelles notions (algèbres presque perfectoïdes) et techniques galoisiennes.

## TABLE DES MATIÈRES

Introduction . . . . .	1
1. Préliminaires de presque-algèbre . . . . .	4
2. La catégorie bicomplète des algèbres de Banach uniformes . . . . .	10
3. La catégorie bicomplète des algèbres perfectoïdes . . . . .	34
4. Analyse perfectoïde autour du « théorème d'extension de Riemann » . . . . .	53
5. Le « lemme d'Abhyankar » perfectoïde . . . . .	63
Remerciements . . . . .	69
Bibliographie . . . . .	69

## Introduction

**0.1.** La théorie des extensions presque étales de G. Faltings trouve sa source dans les travaux de J. Tate sur les extensions profondément ramifiées de corps locaux, et son aboutissement dans l'étude de la cohomologie étale  $p$ -adique des variétés algébriques ou analytiques sur un corps  $p$ -adique (*cf. e.g.* [10, 26]). Elle utilise le langage de la « presque-algèbre » introduit par Faltings à ce propos, dont le principe consiste, dans le cadre  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{m})$  constitué d'un anneau et d'un idéal idempotent, à « négliger » les  $\mathfrak{A}$ -modules annulés par  $\mathfrak{m}$  [15].

Cette théorie a été renouvelée par l'approche perfectoïde de P. Scholze. Un corps  $\mathcal{K}$  complet pour une valuation  $p$ -adique non discrète, d'anneau de valuation  $\mathcal{K}^\circ$  et d'idéal de valuation  $\mathcal{K}^{\circ\circ}$ , est dit *perfectoïde* si l'élévation à la puissance  $p$  est surjective sur  $\mathcal{K}^\circ/p\mathcal{K}^\circ$ . Une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  est dite *perfectoïde* si elle est uniforme (*i.e.* si la sous- $\mathcal{K}^\circ$ -algèbre  $\mathcal{A}^\circ$  des éléments dont les puissances sont bornées est bornée), et si l'élévation à la puissance  $p$  est surjective sur  $\mathcal{A}^\circ/p\mathcal{A}^\circ$ .

**0.2.** Le théorème de « presque-pureté » de Faltings, sous la forme générale que lui ont donnée Scholze d'une part [30], et K. Kedlaya et R. Liu d'autre part [21], affirme que *si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde et  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{A}$ -algèbre étale finie, alors  $\mathcal{B}$  est perfectoïde et  $\mathcal{B}^\circ$  est presque étale finie sur  $\mathcal{A}^\circ$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$ , de sorte que  $\text{tr}_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$  envoie  $\mathcal{B}^\circ$  presque surjectivement dans  $\mathcal{A}^\circ$  si  $\mathcal{B}^\circ$  est un  $\mathcal{A}^\circ$ -module fidèle.*

**0.3.** Le premier objectif de l'article est de généraliser ce théorème au *cas ramifié*, en s'inspirant du lemme d'Abhyankar. Rappelons que dans la situation d'un anneau local régulier d'inégale caractéristique  $(0, p)$  et d'une extension finie plate, ramifiée le long d'un diviseur à croisements normaux défini par une équation  $pg = 0$ , d'indices de ramification premiers à  $p$ , ce lemme assure qu'on peut « rendre l'extension étale » sans inverser  $pg$ , par l'adjonction de racines de  $pg$  d'ordre divisible par tous les indices de ramification, suivie du passage à la fermeture intégrale.

Notre résultat principal peut être vu comme un analogue perfectoïde du lemme d'Abhyankar, sans hypothèse de croisements normaux ni condition sur les indices de ramification, au prix de remplacer « étale » par « presque étale » (dans un cadre qui, contrairement à l'usage, *n'est pas celui d'un anneau de valuation* et de son idéal maximal).

*Théorème 0.3.1.* — Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre perfectoïde sur un corps perfectoïde  $\mathcal{K}$  de caractéristique résiduelle  $p$ . On suppose que  $\mathcal{A}$  contient une suite de racines  $p^m$ -èmes compatibles d'un élément  $g \in \mathcal{A}^o$  non diviseur de zéro, ce qui permet de voir  $\mathcal{A}^o$  comme  $\mathcal{K}^o[\mathbb{T}_{p^\infty}^{\frac{1}{g}}]$ -algèbre en envoyant  $\mathbb{T}_{p^\infty}^{\frac{1}{g}}$  sur  $g^{\frac{1}{p^m}}$ . On se place dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[\mathbb{T}_{p^\infty}^{\frac{1}{g}}], \mathbb{T}_{p^\infty}^{\frac{1}{g}} \mathcal{K}^{oo}[\mathbb{T}_{p^\infty}^{\frac{1}{g}}])$ .

Soit  $\mathcal{B}'$  une  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ -algèbre étale finie.

- (1) Il existe une plus grande algèbre perfectoïde  $\mathcal{B}$  comprise entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}'$ , telle que l'inclusion  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  soit continue. On a  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}] = \mathcal{B}'$ , et  $\mathcal{B}^o$  est contenue dans la fermeture intégrale de  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o$  dans  $\mathcal{B}'$  et lui est presque isomorphe (et aussi presque isomorphe à la fermeture intégrale de  $\mathcal{A}^o$  dans  $\mathcal{B}'$ ).
- (2) Pour tout  $m \in \mathbf{N}$ ,  $\mathcal{B}^o/p^m$  est presque étale finie sur  $\mathcal{A}^o/p^m$  (et  $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$  est presque étale finie sur  $\mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ ).
- (3) Si  $\mathcal{B}'$  est un  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ -module fidèle, le morphisme trace  $\mathrm{tr}_{\mathcal{B}'/\mathcal{A}[\frac{1}{g}]}$  envoie  $\mathcal{B}^o$  presque surjectivement dans  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o$ .

Ce résultat présente un double aspect heuristique : pour toute extension finie d'une algèbre perfectoïde, (i) la ramification géométrique est presque supprimée par adjonction des racines  $p^\infty$ -ièmes du discriminant, complétion et passage à une fermeture intégrale (en analogie avec le lemme d'Abhyankar), et (ii) il en est alors essentiellement de même de la ramification arithmétique (ce qui étend le théorème de presque-pureté de Faltings *et al.* qui traite du cas géométriquement non ramifié).

En ce qui concerne le point (2), on peut naturellement se demander si  $\mathcal{B}^o$  est presque étale finie sur  $\mathcal{A}^o$ . C'est plausible, mais nous ne l'avons pas démontré, le problème étant celui de la presque finitude de  $\mathcal{B}^o$  sur  $\mathcal{A}^o$ , cf. rem. 5.2.1.

**0.4.** Nous démontrerons ce théorème à partir du cas étale, où le théorème de presque-pureté est appliqué aux « localisations affinoïdes »  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$ ,  $\lambda \in \mathcal{K}^{oo} \setminus 0$  (c'est-à-

dire, en termes géométriques, aux complémentaires de voisinages tubulaires du lieu des zéros de  $g$  dans le spectre analytique de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$ -algèbres étales finies induite par  $\mathcal{B}'$ .

Le passage à la limite  $\lambda \rightarrow 0$  crucial repose

(1) d'une part sur des résultats du type « théorème d'extension de Riemann » : pour  $(\mathcal{A}, g)$  comme ci-dessus,  $\lim_j \mathcal{A}\{\frac{g^j}{g}\}^o$  est la fermeture complètement intégrale de  $\mathcal{A}^o$  dans  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ , qui n'est autre que  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o$  (th. 4.2.2) : inversement, étant donné un système projectif d'algèbres perfectôïdes  $(\mathcal{A}^i)$  qui se déduisent les unes des autres par localisation  $(\mathcal{A}^i\{\frac{g^j}{g}\} \cong \mathcal{A}^i)$  et contiennent les racines  $g^{\frac{1}{p^m}}$ , l'algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{A} := (\lim_j \mathcal{A}^{j^o})[\frac{1}{g}]$  est presque perfectôïde (i.e. l'élévation à la puissance  $p$  est presque surjective sur  $\mathcal{A}^o/p\mathcal{A}^o$ ) (th. 4.4.2) ;

(2) d'autre part sur des techniques galoisiennes qui permettent de contrôler dans le passage à la limite la propriété « presque étale fini », l'avantage de la propriété galoisienne, qui implique cette dernière, étant « de nature équationnelle » (présence d'un torseur). Ces techniques permettent déjà, au demeurant, de simplifier la preuve du théorème de presque-pureté de Faltings *et al.* (cf. 1.9, 3.4, 5.2).

**0.5.** Le théorème 0.3.1 fournit un moyen aussi économique que général pour associer à toute  $\mathcal{K}$ -algèbre affine ou affinoïde réduite une algèbre (presque) perfectôïde à l'aide d'une normalisation de Noether, en adjoignant les racines  $p^\infty$ -ièmes des coordonnées et d'un discriminant, complétant et prenant une fermeture intégrale. Dans une certaine mesure, cela libère la construction d'algèbres perfectôïdes du « carcan torique » habituel (cf. 5.4).

**0.6.** Il nous a paru nécessaire de faire précéder la preuve de ces résultats d'un examen approfondi, assorti de maint exemple et contre-exemple, des techniques de construction et des aspects catégoriques des algèbres de Banach uniformes et des algèbres perfectôïdes (il ne s'agit pas d'une  $n$ -ième présentation des bases de la théorie perfectôïde). Ces deux catégories admettent limites et colimites, et le plongement de celle-ci dans celle-là admet un adjoint à droite  $\natural$ . Les colimites s'y calculent donc de même manière, mais pas les limites (cf. 3.9) ; c'est le nœud du problème dans les passages à la limite ci-dessus. Comme souvent, le point de vue catégorique permet en outre de se dispenser d'arguments ad hoc et suggère le cadre (cf. 2-limites en 4.4.2, 5.2).

Nous avons aussi examiné en détail un certain nombre de questions liées à l'apparition cruciale de la presque-algèbre hors du cadre valuatif usuel en dégageant notamment la notion d'algèbre presque perfectôïde (cf. 3.5.4), précisé les questions de localisation affinoïde, et introduit les techniques galoisiennes mentionnées plus haut.

**0.7.** Le lecteur qui désire parvenir hâtivement au lemme d'Abhyankar perfectôïde 0.3.1 peut partir de 4.2.2 et emprunter le gué 4.3.1, 4.4, 5.2 et 5.3.

Le lecteur algébriste peut utiliser le dictionnaire 2.3 entre le langage de l'analyse fonctionnelle adopté dans cet article et celui de l'algèbre commutative ; mais comme l'illustre déjà l'exemple de  $\mathbb{K}^o[[T]][\frac{1}{p}]$  (puis passage à  $T^{\frac{1}{p^\infty}}$  et complétion), interprété

comme algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées sur le disque unité ouvert (perfectoïde), le langage de l'analyse fonctionnelle exprime une intuition géométrique précieuse lorsqu'on quitte les parages noethériens (suggérant par exemple l'analogie avec le théorème d'extension de Riemann).

**0.8.** Dans l'article suivant, nous appliquerons le lemme d'Abhyankar perfectoïde à la conjecture du facteur direct de M. Hochster en algèbre commutative.

## 1. Préliminaires de presque-algèbre

Nous ferons appel à quelques résultats de cette théorie initiée par G. Faltings et développée dans l'ouvrage fondamental de O. Gabber et L. Ramero [15].

**1.1. Cadre.** — Un *cadre*<sup>1</sup> pour la presque-algèbre consiste en la donnée d'un anneau commutatif unitaire  $\mathfrak{V}$  et d'un idéal idempotent  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ .

Comme dans [15], nous supposons que  $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{V}} \mathfrak{m}$  est *plat sur*  $\mathfrak{V}$ . Cette hypothèse est stable par changement de base [15, rem. 2.1.4], et plus faible que la platitude de  $\mathfrak{m}$  (qui entraîne  $\mathfrak{m} \cong \tilde{\mathfrak{m}}$ ). La platitude de  $\mathfrak{m}$  est acquise si  $\mathfrak{m}$  est de la forme  $\pi^{\frac{1}{p^\infty}} \mathfrak{V}$ , où  $(\pi^{\frac{1}{p^i}})$  est une suite compatible de racines  $p^i$ -ièmes d'un élément  $\pi$  non-diviseur de zéro de l'anneau  $\mathfrak{V}$  (cas qui suffirait dans la suite de l'article).

**1.2.  $\mathfrak{V}^a$ -modules.** — La catégorie des  $\mathfrak{V}^a$ -modules (ou  $(\mathfrak{V}, \mathfrak{m})^a$ -modules, s'il y a lieu de préciser) est la catégorie des  $\mathfrak{V}$ -modules localisée par la sous-catégorie de Serre des modules de  $\mathfrak{m}$ -torsion : un  $\mathfrak{V}$ -module est *presque nul* s'il est annulé par  $\mathfrak{m}$ .

On a  $\text{Hom}_{\mathfrak{V}^a}(M, N) = \text{Hom}_{\mathfrak{V}}(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathfrak{V}} M, N)$ , cf. [15, §2.2.2].

On dit qu'un morphisme de  $\mathfrak{V}$ -modules est presque injectif (*resp.* presque surjectif) si son noyau (*resp.* conoyau) est annulé par  $\mathfrak{m}$ ; cela revient à dire qu'il est un monomorphisme (*resp.* épimorphisme) de  $\mathfrak{V}^a$ -modules.

La catégorie des  $\mathfrak{V}^a$ -modules est abélienne. En particulier, un morphisme de  $\mathfrak{V}$ -modules est à la fois presque injectif et presque surjectif si et seulement s'il est un presque-isomorphisme. Le foncteur de localisation  $M \mapsto M^a$ , qui est l'identité sur les objets, admet<sup>2</sup>

- un adjoint à droite :  $N \mapsto N_* := \text{Hom}_{\mathfrak{V}^a}(\mathfrak{V}^a, N)$  (module des *presque-éléments*),
- un adjoint à gauche  $N! := \tilde{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathfrak{V}} N_*$ .

En particulier, il commute aux limites et aux colimites. On a en outre  $(N_*)^a \cong N$  et  $(M^a)_* \cong \text{Hom}_{\mathfrak{V}}(\tilde{\mathfrak{m}}, M)$  (qu'on écrira parfois abusivement  $M_*$  pour alléger). Le foncteur

<sup>1</sup> “Basic setting” dans *loc. cit.*

<sup>2</sup> l'existence et les propriétés de  $( )_*$  font partie de la théorie générale de la localisation [14]; en revanche, l'existence de  $( )!$  est spécifique à la presque-algèbre.

$(*)_*$  n'est pas exact à droite, mais  $N \rightarrow N'$  est un épimorphisme si et seulement si  $N_* \rightarrow N'_*$  est presque surjectif.

**1.3. Lemmes de Mittag-Leffler et de Nakayama.** — Le lemme de Mittag-Leffler vaut dans ce contexte : si  $(N^n)$  un système projectif de  $\mathfrak{V}^a$ -modules dont les morphismes de transition sont des épimorphismes, alors  $\lim N^n \rightarrow N^0$  est un épimorphisme. Cela se déduit du cas des  $\mathfrak{V}$ -modules en appliquant successivement les foncteurs exacts à droite  $(*)_!$  et  $(*)^a$  (dont le composé est l'identité de  $\mathfrak{V}^a\text{-Mod}$ ).

Au demeurant, la catégorie abélienne  $\mathfrak{V}^a\text{-Mod}$  est bicomplète (i.e. admet limites et colimites) et admet  $\mathfrak{V}$  comme générateur, les produits d'épimorphismes  $y$  sont des épimorphismes, donc les  $\lim^i$  se comportent comme dans la catégorie des groupes abéliens [29] ; en particulier, elles s'annulent pour  $i > 1$  dans le cas d'un système indexé par un ensemble ordonné dénombrable. La localisation commute aux  $\lim^1$ , qui se calculent comme conoyau du télescope habituel.

La version du lemme de Nakayama pour les modules complets vaut aussi dans ce contexte ([15, lem. 5.3.3]) : soit  $\mathfrak{I}$  un idéal de  $\mathfrak{V}$  et soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme entre  $\mathfrak{V}^a$ -modules  $\mathfrak{I}$ -adiquement complets ; alors  $f$  est un épimorphisme s'il l'est mod.  $\mathfrak{I}$ .

En effet, on a un diagramme commutatif à flèches horizontales épimorphiques

$$\begin{array}{ccc} gr_{\mathfrak{I}}\mathfrak{V} \otimes_{\mathfrak{V}/\mathfrak{I}} M/\mathfrak{I}M & \rightarrow & gr_{\mathfrak{I}}M \\ \downarrow 1 \otimes \bar{f} & & \downarrow gr_{\mathfrak{I}}f \\ gr_{\mathfrak{I}}\mathfrak{V} \otimes_{\mathfrak{V}/\mathfrak{I}} N/\mathfrak{I}N & \rightarrow & gr_{\mathfrak{I}}N, \end{array}$$

donc l'hypothèse entraîne que  $gr_{\mathfrak{I}}f$  est un épimorphisme. Ceci implique que  $M/\mathfrak{I}^n M \xrightarrow{f_n} N/\mathfrak{I}^n N$  est un épimorphisme, de même que  $\ker f_{n+1} \rightarrow \ker f_n$  par le lemme du serpent. Passant à la limite,  $f$  est donc un épimorphisme d'après Mittag-Leffler.

**1.4.  $\mathfrak{V}^a$ -algèbres.** — Les  $\mathfrak{V}^a$ -algèbres (toujours commutatives dans cet article) sont les monoïdes (commutatifs) dans  $\mathfrak{V}^a\text{-Mod}$ . Le foncteur  $(*)^a$  envoie  $\mathfrak{V}\text{-Alg}$  vers  $\mathfrak{V}^a\text{-Alg}$  et admet (la restriction de)  $(*)_*$  comme adjoint à droite. Il admet aussi un adjoint à gauche noté  $(*)_!$  [15, §2.2.25].

La catégorie  $\mathfrak{V}^a\text{-Alg}$  admet des sommes amalgamées, et  $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})^a \cong \mathfrak{B}^a \otimes_{\mathfrak{A}^a} \mathfrak{C}^a$ .

Si  $\mathfrak{A}$  est une  $\mathfrak{V}^a$ -algèbre, on définit des catégories  $\mathfrak{A}\text{-Mod}$  et  $\mathfrak{A}\text{-Alg}$  [15, 2.2.12]. Le foncteur  $(*)^a$  envoie  $\mathfrak{A}_*\text{-Alg}$  vers  $\mathfrak{A}\text{-Alg}$  et admet  $(*)_*$  comme adjoint à droite.

Rappelons que la catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres (associatives commutatives unifères) admet des (petites) limites et colimites, et que le foncteur module sous-jacent préserve les limites, ainsi que les colimites filtrantes. Via  $(*)^a$ , il en est de même pour les presque algèbres. Une décomposition en produit fini  $\mathfrak{B} = \prod \mathfrak{B}_i$  correspond à un système complet d'idempotents orthogonaux  $e_i \in \mathfrak{B}_*$ .

La catégorie  $\mathfrak{A}\text{-Mod}$  admet un produit tensoriel  $\otimes_{\mathfrak{A}}$ , qui induit le coproduit de  $\mathfrak{A}\text{-Alg}$ .

Soit  $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  un morphisme dans  $\mathfrak{V}^a\text{-Alg}$ . C'est un monomorphisme si et seulement si  $\phi_*$  est presque injectif ; on dit alors que  $\mathfrak{B}$  est une *extension* de  $\mathfrak{A}$ .

**1.4.1. Exemple.** — La presque-algèbre s'introduit naturellement dans le contexte suivant. Soient  $\mathcal{K}$  un corps complet pour une valuation non discrète,  $\mathfrak{V} = \mathcal{K}^o$  son anneau de valuation,  $\mathfrak{m} = \mathcal{K}^{oo}$  son idéal de valuation,  $\varpi$  un élément non nul de  $\mathfrak{m}$ , et  $\mathfrak{A}$  une  $\mathfrak{V}$ -algèbre sans  $\varpi$ -torsion ni élément infiniment  $\varpi$ -divisible. On peut alors munir la  $\mathcal{K}$ -algèbre  $\mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}]$  d'une norme canonique, dont la boule unité, en général distincte de  $\mathfrak{A}$  mais presque isomorphe à  $\mathfrak{A}$ , est  $(\mathfrak{A})_*^a$ , cf. sorite 2.3.1 (2b).

**1.5. Recadrage.** — Au rebours de la pratique en presque-algèbre, dans le présent travail, le cadre ne sera pas fixé une fois pour toutes ; au contraire, nous utiliserons de manière essentielle des changements de cadre  $(\mathfrak{V}, \mathfrak{m}) \rightarrow (\mathfrak{V}', \mathfrak{m}')$  (homomorphismes d'anneaux envoyant  $\mathfrak{m}$  dans  $\mathfrak{m}'$ ). Le foncteur exact de restriction des scalaires  $\mathfrak{V}'\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{V}\text{-Mod}$  induit un foncteur exact

$$(\mathfrak{V}', \mathfrak{m}')^a\text{-Mod} \rightarrow (\mathfrak{V}, \mathfrak{m})^a\text{-Mod};$$

si  $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' = \mathfrak{m}'$ , c'est le foncteur  $( )^a$ . On a de même un foncteur  $(\mathfrak{V}', \mathfrak{m}')^a\text{-Alg} \rightarrow (\mathfrak{V}, \mathfrak{m})^a\text{-Alg}$ , qui est l'identité sur les anneaux sous-jacents. Si  $\mathfrak{A}'$  correspond à  $\mathfrak{A}$  par ce dernier foncteur, on a des foncteurs de *recadrage*

$$\mathfrak{A}'\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{A}\text{-Mod}, \mathfrak{A}'\text{-Alg} \rightarrow \mathfrak{A}\text{-Alg}$$

qui sont l'identité sur les objets (vus comme modules, *resp.* algèbres, sur l'anneau sous-jacent à  $\mathfrak{A}$ ) ; si  $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' = \mathfrak{m}'$ , il s'agit encore du foncteur  $( )^a$ . Ces foncteurs sont des isomorphismes si  $\mathfrak{m}$  engendre  $\mathfrak{m}'$ , puisque la presque-nullité d'un module sur l'anneau sous-jacent à  $\mathfrak{A}$  n'est pas modifiée. On a une transformation naturelle de *recadrage*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{V}'}(\tilde{\mathfrak{m}}', \mathbb{N}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{V}}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathbb{N})$$

entre foncteurs des presque-éléments et des presque-éléments du recadré, respectivement.

Heuristiquement, le sens de « presque » devient plus grossier par recadrage (passage de  $\mathfrak{m}'$  à  $\mathfrak{m}$ ), mais ne change pas si l'image de  $\mathfrak{m}$  engendre  $\mathfrak{m}'$ .

**1.6. Platitude.** — Un  $\mathfrak{A}$ -module  $M$  est dit *plat* si l'endofoncteur  $- \otimes_{\mathfrak{A}} M$  de  $\mathfrak{A}\text{-Mod}$  est exact.

On dit qu'un morphisme  $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  est (*fidèlement*) *plat* si  $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} - : \mathfrak{A}\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{B}\text{-Mod}$  est (fidèle) exact ;  $\phi$  est plat (*resp.* fidèlement plat) si et seulement si  $\mathfrak{B}$  est un  $\mathfrak{A}$ -module plat (*resp.*  $\phi$  est un monomorphisme et  $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$  est un  $\mathfrak{A}$ -module plat [15, 3.1.2 (vi)] - c'est le cas en particulier si  $\phi_*$  est plat (*resp.* fidèlement plat). En outre,  $\phi$  est fidèlement plat si et seulement si  $\phi_{!!}$  l'est [15, 3.1.3 ii]. Toute colimite filtrante d'extensions (fidèlement) plates est (fidèlement) plate.

**1.7.**  $\mathfrak{A}$ -Modules projectifs finis. — Passons à de plus subtiles propriétés qui, contrairement aux précédentes, ne sont pas purement catégoriques.

**1.7.1.** Soit  $\mathfrak{A}$  une  $\mathfrak{V}^a$ -algèbre. Un  $\mathfrak{A}$ -module  $P$  est *projectif fini*<sup>3</sup> si pour tout  $\eta \in \mathfrak{m}$ , il existe  $n \in \mathbf{N}$  et des morphismes  $P \rightarrow \mathfrak{A}^n \rightarrow P$  dont le composé est  $\eta|_P$  (cette notion ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $P$  dans  $\mathfrak{A}\text{-Mod}$ ).

Il revient au même ([15, 2.3.10 (i), 2.4.15]) de dire que

- (a)  $P$  est *presque projectif*, i.e. pour tout module  $N$ , et tout  $i > 0$ ,  $\mathfrak{m}\text{Ext}^i(P, N) = 0$ ,
- (b)  $P$  est *presque de type fini*, i.e. pour tout  $\eta \in \mathfrak{m}$ , il existe un morphisme  $\mathfrak{A}^{n(\eta)} \rightarrow P$  de conoyau annulé par  $\eta$ .

**1.7.2. Remarques.** — (1) Tout module  $P$  presque projectif est plat [15, 2.4.18], et fidèlement plat si  $P$  est un  $\mathfrak{A}$ -module fidèle (i.e.  $\mathfrak{A} \rightarrow \text{End}(P)^a$  est un monomorphisme)<sup>4</sup>.

(2) Si  $P$  est projectif fini, il en est de même de ses puissances extérieures. On dispose d'un morphisme trace  $\text{tr}_{P/A} : (\text{End } P)^a \rightarrow A$  [15, 4.1.1].

(3) Soit  $\mathfrak{A}'$  une  $\mathfrak{A}$ -algèbre fidèlement plate. Alors  $\mathfrak{P}$  est un  $\mathfrak{A}$ -module projectif fini si et seulement si  $P \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}'$  est un  $\mathfrak{A}'$ -module projectif fini [15, 3.2.26 iii].

*Lemme 1.7.1.* — Soit  $\mathfrak{I}$  un idéal de  $\mathfrak{A}$  pour lequel  $\mathfrak{A}$  est  $\mathfrak{I}$ -adiquement complète. Alors tout module projectif fini  $P$  est  $\mathfrak{I}$ -adiquement complet.

*Démonstration.* — (voir aussi [15, 5.3.5]). Il s'agit de voir que  $P \rightarrow \hat{P} := \varprojlim P/\mathfrak{I}^n$  est un isomorphisme. Pour tout  $\eta \in \mathfrak{m}$ , il existe  $n \in \mathbf{N}$  et un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} P & \rightarrow & \mathfrak{A}^n & \rightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{P} & \rightarrow & \hat{\mathfrak{A}}^n & \rightarrow & \hat{P} \end{array}$$

où les deux flèches composées horizontales sont la multiplication par  $\eta$  et la flèche verticale du milieu est un isomorphisme. Chassant, on trouve que le noyau et le conoyau de  $P \rightarrow \hat{P}$  sont annulés par  $\eta$ .  $\square$

Un  $\mathfrak{A}$ -module projectif fini  $P$  est *de rang (constant)  $r$*  si  $\bigwedge^{r+1} P = 0$  et  $\bigwedge^r P$  est un  $\mathfrak{A}$ -module inversible [15, 4.3.9]. D'après [15, 4.4.24], un tel module est localement libre de rang  $r$  pour la topologie fpqc (nous n'utiliserons pas ce résultat).

<sup>3</sup> Nous adoptons les simplifications terminologiques de Scholze [30, 4.10, 4.13]; ce n'est d'ailleurs pas là la définition de *loc. cit.* mais c'en est une caractérisation cf. [15, lemme 2.4.15].

<sup>4</sup> Le critère équivalent donné dans [15, 2.4.28] est que le morphisme « dual »  $\text{End}(P)^a \rightarrow \mathfrak{A}$  soit un épimorphisme.

**1.8.**  $\mathfrak{A}$ -algèbres étales finies. — Une  $\mathfrak{A}$ -algèbre  $\mathfrak{B}$  est *étale finie* (resp. *étale finie de rang  $r$* ) si

- (a)  $\mathfrak{B}$  est un  $\mathfrak{A}$ -module projectif fini (resp. projectif fini de rang  $r$ ),
- (b)  $\mathfrak{B}$  est *non ramifiée*, i.e. on a une décomposition de  $\mathfrak{A}$ -algèbre  $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$  dans laquelle la première projection (dans le membre de droite) s'identifie au morphisme de multiplication  $\mu_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ .

Sous (a), la condition (b) équivaut à la platitude de  $\mu_{\mathfrak{B}}$  [15, 3.1.2 vii, 3.1.9].

**1.8.1.** *Remarques.* — (1) Toute extension étale finie  $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$  est fidèlement plate.

(2) Si  $\mathfrak{B}$  est étale finie sur  $\mathfrak{A}$ , on dispose d'une trace  $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$  (morphisme de  $\mathfrak{A}$ -modules) définie comme trace de l'endomorphisme de multiplication par  $b$ . Il commute au changement de base, et la composition avec la multiplication de  $\mathfrak{B}$  induit un isomorphisme de  $\mathfrak{B}$  sur son  $\mathfrak{A}$ -dual [15, 4.1.14] (d'où aussi un isomorphisme entre  $\mathfrak{B}_*$  et son  $\mathfrak{A}_*$ -dual). Si  $\mathfrak{B}$  est une extension étale finie, c'est un épimorphisme [15, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.11].

(3) Soient  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{B}$  deux  $\mathfrak{A}$ -algèbres. On suppose  $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$  fidèlement plat. Alors  $\mathfrak{B}$  est étale finie (resp étale finie de rang  $r$ ) sur  $\mathfrak{A}$  si et seulement si  $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}'$  l'est sur  $\mathfrak{A}'$  [15, 2.4.18, 3.2.26 (ii)].

**1.8.2.** L'«*équivalence remarquable*» de Grothendieck vaut dans ce contexte, du moins si  $\mathfrak{m}$  est de la forme  $\pi^{\frac{1}{p^\infty}} \mathfrak{V}$  et si  $\mathfrak{A}$  est  $\pi$ -adiquement complète : la réduction modulo  $\pi$  induit alors une équivalence entre  $\mathfrak{A}$ -algèbres étales finies et  $\mathfrak{A}/\pi$ -algèbres étales finies [15, th. 5.3.27].

**1.9.** *Extensions galoisiennes.*

**1.9.1.** Soient  $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{C}$  des extensions, et soit  $X$  un ensemble de  $\mathfrak{A}$ -homomorphismes de  $\mathfrak{B}$  vers  $\mathfrak{C}$ . On a alors un morphisme canonique de  $\mathfrak{C}$ -algèbres

$$\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C} \rightarrow \prod_{\chi \in X} \mathfrak{C}, \quad b \otimes c \mapsto (\chi(b)c)_{\chi \in X}.$$

En particulier, si  $G$  un groupe fini de  $\mathfrak{A}$ -automorphismes de  $\mathfrak{B}$ , on a un morphisme canonique de  $\mathfrak{B}$ -algèbres (pour l'action à droite de  $\mathfrak{B}$  sur le membre de gauche)

$$\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \rightarrow \prod_{\gamma \in G} \mathfrak{B}, \quad b \otimes b' \mapsto (\gamma(b)b')_{\gamma \in G}.$$

Si  $n$  est l'ordre de  $G$ , et si l'on numérote les éléments de  $G$  pour identifier le groupe de ses permutations à  $\mathfrak{S}_n$ , le produit en couronne<sup>5</sup>  $\mathfrak{S}_n \wr G$  agit par  $\mathfrak{A}$ -automorphismes de  $\prod \mathfrak{B}$  via  $(\sigma, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))(b_1, \dots, b_n) = (\gamma_{\sigma^{-1}(1)}(b_{\sigma^{-1}(1)}), \dots, \gamma_{\sigma^{-1}(n)}(b_{\sigma^{-1}(n)}))$ .

<sup>5</sup> i.e. le produit  $\mathfrak{S}_n \times G^n$  muni de la multiplication  $(\sigma, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))(\sigma', (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)) = (\sigma\sigma', (\gamma_{\sigma^{-1}(1)}\gamma'_1, \dots, \gamma_{\sigma^{-1}(n)}\gamma'_n))$ .



On note  $\mathfrak{B}^G$  la  $\mathfrak{A}$ -algèbre des  $G$ -invariants de  $\mathfrak{B}$  (en tant que  $\mathfrak{A}$ -module, c'est le noyau de  $\mathfrak{B} \xrightarrow{(\dots, \gamma^{-1}, \dots)} \prod_G \mathfrak{B}$ ).

**1.9.2.** On dit que l'extension  $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$  est *galoisienne* de groupe  $G$  si  $\mathfrak{B}^G = \mathfrak{A}$  et si le morphisme canonique  $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \rightarrow \prod_G \mathfrak{B}$  est un isomorphisme (de  $\mathfrak{B}$ -modules à droite). Comme  $(\ )_*$  commute aux limites, il revient au même de requérir que  $(\mathfrak{B}_*)^G = \mathfrak{A}_*$  et que  $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B})_* \rightarrow \prod_G \mathfrak{B}_*$  soit un isomorphisme.<sup>6</sup> Le groupe  $G \times G$  d'automorphismes de  $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \cong \prod_G \mathfrak{B}$  s'identifie alors à un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n \wr G$  par

$$(1.1) \quad (\gamma, 1) \mapsto (r_{\gamma^{-1}}, (1, \dots, 1)), \quad (1, \gamma) \mapsto (\ell_{\gamma}, (\gamma, \dots, \gamma)),$$

où  $\ell, r$  désignent les translations à gauche et à droite respectivement.

*Proposition 1.9.1.*

- (1) Toute extension galoisienne de groupe  $G$  est étale finie, de rang l'ordre de  $G$ . La trace est donnée par la somme des conjugués.
- (2) Soit  $\mathfrak{A}'$  une  $\mathfrak{A}$ -algèbre. Si  $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$  est une extension galoisienne de groupe  $G$ , il en est de même de  $\mathfrak{A}' \hookrightarrow \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}'$ , et réciproquement si  $\mathfrak{A}'$  est fidèlement plate.
- (3) Si  $\mathfrak{C}$  est une extension intermédiaire telle que  $\mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{B}$  est galoisienne de groupe  $H < G$ , le morphisme canonique de  $\mathfrak{B}$ -algèbres  $\mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \rightarrow \prod_{G/H} \mathfrak{B}$  est un isomorphisme, et  $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{C}$  est étale finie, de rang  $|G/H|$ .

*Démonstration.* — (1) Le point est que  $\mathfrak{B}$  est un  $\mathfrak{A}$ -module projectif fini, comme nous allons le voir (il s'agit d'un décalque de l'argument classique en théorie de Galois des anneaux). Notons  $t_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}} : \mathfrak{B}_* \rightarrow \mathfrak{B}_*^G = \mathfrak{A}_*$  la somme des conjugués. Voyons  $\mathfrak{B}$  comme  $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}$ -algèbre via le premier facteur de la décomposition (autrement dit, via le morphisme de multiplication). Comme  $\mathfrak{B}_* \otimes_{\mathfrak{A}_*} \mathfrak{B}_* \rightarrow (\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B})_*$  est un presque-isomorphisme, on obtient, pour tout  $\eta \in \mathfrak{m}$ , un élément  $e_{\eta} \in \mathfrak{B}_* \otimes_{\mathfrak{A}_*} \mathfrak{B}_*$  tel que  $e_{\eta}^2 = \eta e_{\eta}$ , qui annule le noyau de la multiplication  $\mathfrak{B}_* \otimes_{\mathfrak{A}_*} \mathfrak{B}_* \rightarrow \mathfrak{B}_*$  et que celle-ci envoie sur  $\eta 1_{\mathfrak{B}_*}$ . En développant  $e_{\eta} = \sum_{i=1}^{i=n(\eta)} b_i \otimes b'_i$ , on obtient  $\sum \gamma(b_i) b'_i = 0$  si  $\gamma \neq 1_G$ , et  $\sum b_i b'_i = \eta 1_{\mathfrak{B}_*}$ , d'où  $\eta b = \sum t_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}}(bb_i) b'_i$  pour tout  $b \in \mathfrak{B}_*$ ; en d'autres termes, le composé

$$\mathfrak{B}_* \xrightarrow{b \mapsto (t_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}}(bb_i))} \mathfrak{A}_*^{n(\eta)} \xrightarrow{(a_i) \mapsto \sum a_i b'_i} \mathfrak{B}_*$$

est  $\eta id_{\mathfrak{B}_*}$ , ce qui montre que  $\mathfrak{B}$  est projectif fini. Par descente fidèlement plate de  $\mathfrak{B}$  à  $\mathfrak{A}$ , on voit aussi que  $\mathfrak{B}$  est de rang  $|G|$ , et que  $Tr_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}} = t_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}}^a$ .

(2) Si  $\mathfrak{B}$  est extension galoisienne de  $\mathfrak{A}$  de groupe  $G$ , on a vu qu'elle est (fidèlement) plate, donc  $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}'$  est une extension de  $\mathfrak{A}'$ . On a  $\mathfrak{B}' \otimes_{\mathfrak{A}'} \mathfrak{B}' \cong (\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}) \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}' \cong \prod_G \mathfrak{B}'$ , d'où aussi  $\mathfrak{B}' \cong (\mathfrak{B}' \otimes_{\mathfrak{A}'} \mathfrak{B}')^{G \times 1} \cong \prod_G \mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}'^G \otimes_{\mathfrak{A}'} \mathfrak{B}'$

<sup>6</sup> cela n'entraîne ni que  $\mathfrak{B}_*$  soit galoisienne sur  $\mathfrak{A}_*$  (car  $(\ )_*$  ne commute pas au produit tensoriel), ni que  $\mathfrak{B}_*$  soit galoisienne sur  $\mathfrak{A}_*$  (car  $(\ )_*$  ne commute pas aux produits finis).

et  $(\mathfrak{B}')^G = \mathfrak{A}'$  par platitude fidèle de  $\mathfrak{B}'$  sur  $\mathfrak{A}'$ . On obtient la réciproque par descente fidèlement plate.

(3) Après tensorisation  $\otimes_{\mathfrak{C}} \mathfrak{B}$ , ce morphisme devient le composé des  $\mathfrak{B}$ -isomorphismes  $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \xrightarrow{\sim} \prod_G \mathfrak{B} \xrightarrow{\sim} \prod_{G/H} (\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{C}} \mathfrak{B}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{C}} \prod_{G/H} \mathfrak{B}$ , donc est un isomorphisme par descente fidèlement plate de  $\mathfrak{B}$  à  $\mathfrak{C}$  (cf. rem. 1.8.1 (3)). En outre,  $\mathfrak{C}$  est étale finie de rang  $|G/H|$  sur  $\mathfrak{A}$  par descente fidèlement plate de  $\mathfrak{B}$  à  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

**1.9.3.** Terminons ce paragraphe, en quittant la presque-algèbre, par deux lemmes galoisiens utiles dans la suite. Le premier est standard dans le cas connexe mais valable en général ([25, p. 122]).

*Lemme 1.9.2.* — Soit  $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{S}$  une extension étale finie d'anneaux, de rang constant  $r$ . Il existe une extension galoisienne  $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{T}$  de groupe  $\mathfrak{S}_r$  se factorisant par  $\mathbf{S}$ , telle que  $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{T}$  soit une extension galoisienne de groupe  $\mathfrak{S}_{r-1}$ .

Posons  $\mathbf{X} = \text{Spec} \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Y} = \text{Spec} \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Z} =$  complémentaire dans  $\mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} \cdots \times_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$  ( $r$  facteurs) des diagonales partielles. Ces dernières sont ouvertes et fermées dans le produit fibré puisque  $\mathbf{Y}$  est étale sur  $\mathbf{X}$ , donc il en est de même de  $\mathbf{Z}$  qui est par suite étale fini sur  $\mathbf{X}$  (et aussi sur  $\mathbf{Y}$  via la première projection). Par ailleurs,  $\mathfrak{S}_r$  agit par permutation des facteurs, et on vérifie sur les fibres que le morphisme de revêtements étales  $\mathfrak{S}_r \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}$  (resp.  $\mathfrak{S}_{r-1} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}$ ) est un isomorphisme.  $\square$

*Lemme 1.9.3.* — Soit  $G$  un groupe fini d'automorphismes d'un anneau  $\mathbf{S}$ , et soit  $\mathbf{R} := \mathbf{S}^G$  l'anneau des invariants. Soit  $\mathbf{R} \subset \mathbf{S}' \subset \mathbf{S}$  une extension intermédiaire stable sous  $G$ , et galoisienne sur  $\mathbf{R}$  de groupe  $G$ . Alors  $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$ .

Les idempotents  $e_g$  donnant lieu à la décomposition  $\mathbf{S}' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S}' \cong \prod_{\gamma \in G} \mathbf{S}'$  décomposent aussi  $\mathbf{S} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S}' \cong \prod_{\gamma \in G} e_{\gamma}(\mathbf{S} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S}') \cong \prod_{\gamma \in G} \mathbf{S}''$  (puisque que les  $e_{\gamma}$  sont permutés par  $G$ ). Compte tenu de ce que  $\mathbf{S}'$  est fidèlement plat sur  $\mathbf{R}$  (cf. prop. 1.9.1), on a  $\mathbf{S}'' \cong (\mathbf{S} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S}')^{G \times 1} = \mathbf{S}^G \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S}' = \mathbf{S}'$ , d'où  $\mathbf{S}' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S}' = \mathbf{S} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S}'$ , puis  $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$ .  $\square$

## 2. La catégorie bicomplète des algèbres de Banach uniformes

Dans cet article, le rôle principal est joué par les algèbres commutatives sur un corps complet non-archimédien, complètes pour une norme multiplicative pour les puissances. Nous passons ici en revue leurs propriétés générales et esquissons, dans ce contexte, un dictionnaire entre le langage de l'analyse fonctionnelle et celui de l'algèbre commutative.

**2.1.** *Algèbres de Banach.* — Nous renvoyons à [6] comme référence générale.

**2.1.1.** Soit  $\mathcal{K}$  un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne non triviale, de corps résiduel  $k$ . On note  $\mathcal{K}^o$  son anneau (*resp.*  $\mathcal{K}^{oo}$  son idéal) de valuation, de sorte que  $k = \mathcal{K}^o / \mathcal{K}^{oo}$ .

Dans cet article, toutes les  $\mathcal{K}$ -algèbres sont commutatives associatives unifères (l'algèbre nulle n'est pas exclue). Si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre, une *semi-norme*  $\mathcal{A} \xrightarrow{||} \mathbf{R}$  de  $\mathcal{K}$ -algèbre vérifie  $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$ ,  $|ab| \leq |a||b|$  avec égalité si  $a \in \mathcal{K}$ , et  $|1_{\mathcal{A}}| = 1$  si  $\mathcal{A} \neq 0$ . C'est une *norme* si elle ne s'annule pas sur  $\mathcal{A} \setminus 0$ . On note  $\mathcal{A}_{| \leq r}$ , ou plus simplement  $\mathcal{A}_{\leq r}$ , le sous-groupe additif de  $\mathcal{A}$  formé des  $a \in \mathcal{A}$  tels que  $|a| \leq r$ ; de même  $\mathcal{A}_{< r} := \{a \in \mathcal{A} \mid |a| < r\}$ . La boule unité  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  est une sous- $\mathcal{K}^o$ -algèbre ouverte.

Toute  $\mathcal{K}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  munie d'une norme multiplicative est intègre.

La catégorie des  *$\mathcal{K}$ -algèbres normées* a pour morphismes les *homomorphismes continus* d'algèbres : ce sont les homomorphismes  $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$  bornés sur  $\mathcal{A}_{\leq 1}$ , *i.e.* ceux pour lesquels  $\|\phi\| := \sup_{a \in \mathcal{A} \setminus 0} \frac{|\phi(a)|}{|a|} < \infty$ . On dit que  $\phi$  est *isométrique*, ou que  $\mathcal{A}$  est une *sous-algèbre normée* de  $\mathcal{B}$ , si  $|\phi(a)| = |a|$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .

Cette catégorie admet des sommes amalgamées : le séparé de  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  pour la semi-norme produit tensoriel.

La catégorie  **$\mathcal{K}$ -Ban** des  *$\mathcal{K}$ -algèbres de Banach* est la sous-catégorie pleine formée des algèbres normées complètes. Une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  étant fixée, les  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach  $\mathcal{B}$  munies d'un morphisme  $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$  sont appelées  *$\mathcal{A}$ -algèbres de Banach*. Elles forment de manière évidente une catégorie  **$\mathcal{A}$ -Ban**.

**2.1.2.** La catégorie  **$\mathcal{K}$ -Ban** admet un objet initial  $\mathcal{K}$  et un objet final  $0$ , des sommes amalgamées  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  (*produit tensoriel complété* [6, 3.1.1, prop. 2]), et donc des colimites finies. Le foncteur  $-\hat{\otimes}_{\mathcal{K}} \mathcal{A}$  est adjoint à gauche du foncteur oubli  **$\mathcal{A}$ -Ban**  $\rightarrow$   **$\mathcal{K}$ -Ban**.

Elle admet des produits fibrés  $\mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ , et donc des limites finies.

Si  $I$  est un idéal fermé de  $\mathcal{B}$  et  $J$  un idéal fermé de  $\mathcal{C}$ , et si  $K$  est la fermeture de l'image de  $I \otimes \mathcal{C} + \mathcal{B} \otimes J$  dans  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ , alors le morphisme canonique

$$(2.1) \quad (\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}) / K \rightarrow (\mathcal{B}/I) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\mathcal{C}/J)$$

est une isométrie (*cf.* [6, 2.1.8 prop. 6] et sa preuve).

Par ailleurs, si  $\mathcal{C}$  est *projectif fini* sur  $\mathcal{A}$  et si sa norme induit la topologie canonique de  $\mathcal{A}$ -module projectif fini, alors  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  est complet (cela suit de [21, lemma 2.2.12]). Ce n'est plus vrai en général si  $\mathcal{C}$  est fini non projectif.

**2.1.3.** *Remarques.* — (1) Si  $\mathcal{C}'$  est une sous- $\mathcal{A}$ -algèbre normée de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}'$  n'est pas nécessairement une sous-algèbre normée de  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ .

(2) Supposons que  $\mathcal{C}$  admette une base orthogonale  $c_1, \dots, c_n, \dots$  sur  $\mathcal{A}$ . Tout élément  $d \in \mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  s'écrit alors de manière unique  $d = \sum b_j \otimes c_j$ , et on a  $|d| = \max |b_j| |c_j|$ . En effet, pour toute autre expression  $d = \sum b'_i \otimes c'_i$ , on aura  $c'_i = \sum a_{ij} c_j$ , d'où  $|c'_i| = \max |a_{ij}| |c_j|$ , et  $b_j = \sum a_{ij} b'_i$ , d'où  $\max |b_j| |c_j| \leq \max |a_{ij}| |c_j| |b'_i| \leq \max |c'_i| |b'_i|$ . On en déduit que  $\mathcal{B} \xrightarrow{b \mapsto b \otimes 1} \mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  est isométrique.

**2.1.4.** Si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre normée, on note  $\mathcal{A}^o$  l'ensemble des *éléments dont les puissances restent bornées*. C'est une sous- $\mathcal{K}^o$ -algèbre ouverte de  $\mathcal{A}$  qui contient  $\mathcal{A}_{\leq 1}$ , et qui ne dépend que de la classe d'équivalence de la norme. Sa formation est fonctorielle et commute à la complétion. On a  $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^o = \mathcal{A}^o \times \mathcal{B}^o$  (le produit étant muni de la norme supremum).

On note  $\mathcal{A}^{oo}$  l'ensemble des *éléments topologiquement nilpotents*. C'est un idéal ouvert de  $\mathcal{A}^o$ , et  $\mathcal{A}^{oo} = \sqrt{\mathcal{A}^{oo}}$ . Si  $\mathcal{A}$  est complète,  $\mathcal{A}^{oo}$  est contenu dans le radical de Jacobson de  $\mathcal{A}^o$ , car pour tout  $(a, b) \in \mathcal{A}^{oo} \times \mathcal{A}^o$ ,  $1 - ab$  est inversible d'inverse  $\sum a^n b^n$ . En particulier, un élément de  $\mathcal{A}^o$  est inversible si et seulement si son image dans  $\mathcal{A}^o / \mathcal{A}^{oo}$  est inversible. Les idéaux maximaux de  $\mathcal{A}$  sont fermés [6, 1.2.4/5].

La règle  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^o / \mathcal{A}^{oo}$  définit un foncteur des  $\mathcal{K}$ -algèbres normées vers les  $k$ -algèbres *réduites* (i.e. sans élément nilpotent non nul).

**2.1.5.** Pour toute  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach  $\mathcal{A}$ , on note  $\mathcal{A}\langle T \rangle$  le complété de l'algèbre des polynômes  $\mathcal{A}[T]$  pour la norme supremum des coefficients (*norme de Gauss*, qui est multiplicative si celle de  $\mathcal{A}$  l'est). Alors  $\mathcal{A}\langle T \rangle^o$  est l'algèbre des séries convergentes à coefficients dans  $\mathcal{A}^o$ . Le couple  $(\mathcal{A}\langle T \rangle, T)$  est universel parmi les couples  $(\mathcal{B}, b \in \mathcal{B}^o)$  où  $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{A}$ -algèbre de Banach (cf. [6, 1.4.3, cor. 2]).

**2.1.6. Remarque.** — Pour traiter des questions d'isométrie, il est commode de se placer dans la sous-catégorie non pleine de  $\mathcal{K}$ -**Ban** ayant même objets et pour morphismes ceux de norme  $\leq 1$ , où  $\hat{\otimes}$  est encore un coproduit. Dans cette catégorie, le couple  $(\mathcal{A}\langle T \rangle, T)$  est universel parmi les couples  $(\mathcal{B}, b \in \mathcal{B}_{\leq 1})$ .

Si  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un morphisme dans cette catégorie, le morphisme canonique  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T \rangle \rightarrow \mathcal{B}\langle T \rangle$  est isométrique : l'inverse est donné par la propriété universelle de  $\mathcal{B}\langle T \rangle$ . En combinant ceci à (2.1), on trouve que pour tout idéal fermé  $J$  de  $\mathcal{A}\langle T \rangle$  le morphisme canonique

$$(2.2) \quad \mathcal{B}\langle T \rangle / J\mathcal{B}\langle T \rangle^- \rightarrow \mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\mathcal{A}\langle T \rangle / J)$$

est isométrique,  $J\mathcal{B}\langle T \rangle^-$  désignant la fermeture de l'idéal  $J\mathcal{B}\langle T \rangle$ .

## 2.2. Normes spectrales.

**2.2.1.** La *semi-norme spectrale*<sup>7</sup> associée à une norme  $||$  de  $\mathcal{K}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est définie par

$$(2.3) \quad |a|_{sp} := \lim_m |a^m|^{\frac{1}{m}}$$

(ce n'est pas nécessairement une norme : on peut avoir  $|a|_{sp} = 0$  pour  $a$  non nul). On a  $||_{sp} \leq ||$ . Si  $||_{sp} = ||$ , c'est-à-dire si  $||$  est multiplicative pour les puissances, on dit que  $||$  est une *norme spectrale*, ou que  $\mathcal{A}$  est une  *$\mathcal{K}$ -algèbre normée spectrale*. Dans ce cas,  $\mathcal{A}^o$  coïncide avec  $\mathcal{A}_{\leq 1}$ , et  $\mathcal{A}^{oo}$  avec  $\mathcal{A}_{< 1}$ .

Une norme de  $\mathcal{K}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  est multiplicative si et seulement si elle est spectrale et  $\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo}$  est intègre [6, 1.5.3]<sup>8</sup>.

**2.2.2.** Une  $\mathcal{K}$ -algèbre normée  $\mathcal{A}$  est dite *uniforme* si  $\mathcal{A}^o$  est borné. Il revient au même de dire que la norme est équivalente à sa semi-norme spectrale associée. Il est clair, en effet, que cette dernière condition entraîne que  $\mathcal{A}^o$  est borné, puisque  $\mathcal{A}^o$  est contenue dans la boule unité de la semi-norme spectrale ; pour la réciproque, on observe que  $|a| \leq |a|_{sp} \sup_{b \in \mathcal{A}^o} |b|$ .

Toute algèbre normée uniforme  $\mathcal{A}$  est réduite. Si  $|\mathcal{K}|$  est dense dans  $\mathbf{R}_+$ , on a  $\mathcal{A}^{oo} = \mathcal{K}^{oo} \mathcal{A}^o = (\mathcal{A}^{oo})^2$ .

**2.2.3. Exemples.** — (1) Toute  $\mathcal{K}$ -algèbre affinoïde (classique, *i.e.* quotient de  $\mathcal{K}\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ ) qui est réduite est uniforme [6, 6.2.1]. En fait, dans ce cas, la structure algébrique détermine la topologie et aussi la norme spectrale [6, 6.1.3, prop. 2].

(2) Si  $\mathcal{A}$  est uniforme (*resp.* spectrale), il en est de même de  $\mathcal{A}\langle T \rangle$  :  $\mathcal{A}\langle T \rangle^o = \mathcal{A}^o\langle T \rangle$  est borné (*resp.* est la boule unité).

**2.2.4.** Un homomorphisme  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre  $\mathcal{K}$ -algèbres normées uniformes est continu si et seulement si  $\phi(\mathcal{A}^o) \subset \mathcal{B}^o$  (et dans le cas où les normes sont spectrales, si et seulement si  $\|\phi\| \leq 1$ ). Il en découle que la norme spectrale d'une algèbre normée uniforme est l'unique norme spectrale compatible avec la topologie.

On en déduit qu'une  $\mathcal{K}$ -algèbre  $\mathcal{A}$  admet au plus une norme spectrale pour laquelle elle est complète : en effet, si  $||_1, ||_2$  sont deux telles normes, on peut supposer, en remplaçant la première par le supremum des deux, que le morphisme identique  $(\mathcal{A}, ||_1) \rightarrow (\mathcal{A}, ||_2)$  est continu. Par le théorème de l'image ouverte de Banach [7, I.3.3, th. 1],  $||_1$  est équivalente à  $||_2$ , donc ce morphisme est bicontinu et l'on conclut de ce qui précède que  $||_1 = ||_2$ .

<sup>7</sup> Comme dans le cas archimédien, cette semi-norme a en effet une interprétation « spectrale », du moins dans le cas complet : c'est le supremum des semi-normes multiplicatives bornées, qui sont les points du spectre de Berkovich  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ .

<sup>8</sup> si  $|\mathcal{K}| \neq |\mathcal{A}|$ , il existe de telles algèbres qui ne sont pas des corps valués et telles que  $\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo}$  soit un corps [6, 1.7.1].

La complétion d'une algèbre normée uniforme est une algèbre de Banach uniforme. Il suit du théorème de l'image ouverte qu'une algèbre de Banach est uniforme si et seulement si elle est complète pour la semi-norme spectrale (qui est alors une norme).

**2.2.5.** On note  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  (*resp.*  $\mathcal{A}\text{-uBan}$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{K}\text{-Ban}$  (*resp.*  $\mathcal{A}\text{-Ban}$ ) formée des algèbres de Banach uniformes. Le plongement de  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  dans  $\mathcal{K}\text{-Ban}$  admet un adjoint à gauche (*uniformisation*), donné par le complété séparé relativement à la semi-norme spectrale associée ; par définition, l'uniformisée  $\mathcal{A}^u$  de  $\mathcal{A}$  est donc spectrale. Le morphisme  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^u$  (unité d'ajonction) est un isomorphisme si et seulement si  $\mathcal{A}$  est uniforme.

La catégorie  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  admet un objet initial  $\mathcal{K}$  et un objet final  $0$ , des sommes amalgamées  $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C}$  (uniformisation du produit tensoriel complété), et donc des colimites finies. En tant qu'adjoint à gauche, l'uniformisation préserve les sommes amalgamées, *i.e.* transforme  $\hat{\otimes}$  en  $\hat{\otimes}^u$ . Si  $\mathcal{A}$  est de Banach uniforme, le foncteur  $-\hat{\otimes}_{\mathcal{K}}^u \mathcal{A}$  est adjoint à gauche du foncteur oublie  $\mathcal{A}\text{-uBan} \rightarrow \mathcal{K}\text{-uBan}$ <sup>9</sup>.

Si  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un morphisme dans  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  et  $J$  un idéal fermé de  $\mathcal{A}\langle T \rangle$ , le morphisme canonique

$$(2.4) \quad (\mathcal{B}\langle T \rangle / J\mathcal{B}\langle T \rangle)^u \rightarrow \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^u (\mathcal{A}\langle T \rangle / J)$$

est isométrique (on peut munir  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de leur norme spectrale, ainsi que les deux membres de la formule (2.2)).

**2.2.6.** Tout produit fibré (fini) d'algèbres de Banach uniformes, muni de la norme supremum, est uniforme ; donc la catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes admet des limites finies.

Tout facteur d'une algèbre de Banach uniforme est uniforme (en fait, dans une algèbre normée  $\mathcal{A}$ , tout idempotent non nul  $e$  est de norme  $\geq 1$ , et de norme 1 si  $\mathcal{A}$  est spectrale) ; plus précisément, toute décomposition de  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$  en tant qu'algèbre provient d'une décomposition dans la catégorie des algèbres normées uniformes.

**2.2.7. Remarque.** — Si  $\mathcal{C}$  admet une base orthogonale sur  $\mathcal{A}$ , et si  $\mathcal{B}$  est spectrale, alors  $\mathcal{B} \xrightarrow{b \rightarrow b \otimes 1} \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C}$  est isométrique. En effet,  $|b \otimes 1|_{sp} = \lim_m |b^m \otimes 1|^{\frac{1}{m}} = \lim_m |b^m|^{\frac{1}{m}} = |b|$  d'après la rem. 2.1.3 2).

**2.2.8. Exemple.** — Soit  $\mathcal{L}$  une extension finie galoisienne de  $\mathcal{K}$  de groupe  $G$ , munie de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de  $\mathcal{K}$  (en particulier,  $G$  agit isométriquement). Alors  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L}$  munie de la (semi-)norme produit tensoriel est une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme de dimension finie. L'homomorphisme canonique  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L} \rightarrow \prod_{\gamma \in G} \mathcal{L}$  est

<sup>9</sup> Signalons que  $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  peut ne pas être réduite même si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  sont des corps de car. 0, cf. [13].

continu et bijectif, donc un isomorphisme d'algèbres de Banach, de sorte que  $\mathcal{L} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}}^u \mathcal{L} \cong \prod_{\gamma \in G} \mathcal{L}$ . L'algèbre de Banach  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L}$  est spectrale si et seulement si  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L} \rightarrow \prod_{\gamma \in G} \mathcal{L}$  est isométrique, ce qui équivaut à dire que l'extension  $\mathcal{L}^{oa}$  de  $\mathcal{K}^{oa}$  est galoisienne dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ ; dans le cas de valuation discrète, ceci a lieu si et seulement si l'extension de corps valués  $\mathcal{L}/\mathcal{K}$  est non ramifiée. Le cas d'une extension infinie, beaucoup plus délicat, est étudié en détail dans [13].

*Dans toute la suite, on suppose que le corps résiduel  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ .*

### 2.3. Dictionnaire.

**2.3.1.** Commençons par rappeler quelques opérateurs de fermeture. Soit  $R \hookrightarrow S$  une extension d'anneaux commutatifs unitaires.

Un élément  $s \in S$  est dit entier (*resp.* presque entier<sup>10</sup>) sur  $R$  si ses puissances engendrent (*resp.* sont contenues dans) un sous- $R$ -module de type fini de  $S$ . On note  $R_S^+$  (*resp.*  $R_S^*$ ) leur ensemble. C'est un sous-anneau de  $S$ , la *fermeture intégrale* (*resp.* *complément intégrale*) de  $R$  dans  $S$ . On dit que  $R$  est *intégralement fermé* (*resp.* *complètement intégralement fermé*) dans  $S$  si  $R = R_S^+$  (*resp.*  $R = R_S^*$ ) (cf. e.g. [17]). Alors que  $R_S^+$  est intégralement fermé dans  $S$ ,  $R_S^*$  n'est pas nécessairement complètement intégralement fermé dans  $S$  (cf. rem. 2.3.3 (2) ci-dessous). On a bien sûr  $R_S^+ \subset R_S^*$  (avec égalité si  $R$  est noethérien).

Soit  $p$  un nombre premier. Un élément  $s \in S$  est  $p$ -radiciel sur  $R$  s'il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $s^{pn} \in R$ . On dit que  $R$  est  $p$ -radiciellement fermé dans  $S$  si tout élément  $p$ -radiciel est dans  $R$ ; autrement dit, si  $(s \in S, s^p \in R) \Rightarrow s \in R$ . La *fermeture  $p$ -radicielle* de  $R$  dans  $S$ , notée  $R_S^\dagger$ , est le plus petit anneau intermédiaire  $p$ -radiciellement fermé dans  $S$ . C'est la réunion croissante des sous-anneaux  $R_i$  définis inductivement par  $R_0 = R$ ,  $R_{i+1} =$  sous-anneau de  $S$  engendré par les éléments  $p$ -radiciels de  $R_i$  (cf. [1]). On a bien sûr  $R_S^\dagger \subset R_S^+$ , et  $R$  est  $p$ -radiciellement fermé dans  $S$  si et seulement si  $R = R_S^\dagger$ .

Lorsque  $R$  est de car.  $p$ , ou bien lorsque  $S = R[\frac{1}{p}]$ , l'ensemble des éléments  $p$ -radiciels de  $S$  sur  $R$  est un sous-anneau de  $S$  [28], qui coïncide donc avec  $R_S^\dagger$ .

Étant donné un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R & \hookrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ R' & \hookrightarrow & S' \end{array}$$

on a des homomorphismes naturels  $R_S^\dagger \rightarrow R_{S'}^\dagger$ ,  $R_S^+ \rightarrow R_{S'}^+$ ,  $R_S^* \rightarrow R_{S'}^*$  (pour le premier, on construit pas à pas  $R_i \rightarrow R'_i$ ).

La fermeture intégrale de  $R$  dans  $S$  commute à la localisation [8, V, §1, n. 5, prop. 16], et il en est de même de la fermeture  $p$ -radicielle comme on le vérifie immédiatement. Ce n'est pas vrai en revanche pour la fermeture complètement intégrale [8, V, §1, ex. 12].

<sup>10</sup> on verra au lemme 2.5.3 que cette terminologie, loin d'entrer en conflit avec celle de la presque-algèbre, consonne.

**2.3.2.** Voici un fragment de dictionnaire entre le langage de l'analyse fonctionnelle et celui de l'algèbre commutative (voir aussi [23]).

Fixons  $\varpi \in \mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus 0$ , et notons  $\Gamma \subset \mathbf{R}$  le groupe de valuation correspondant :  $|\varpi|^\Gamma = |\mathcal{K}^\times|$ . Pour tout  $s \in \Gamma$ , soit  $\varpi_s$  un élément de  $\mathcal{K}^\times$  de norme  $|\varpi|^s$  (les considérations qui suivent ne dépendent pas de tels choix). Un complété-séparé ( $\varpi$ -adique ou selon une semi-norme) sera affublé d'un chapeau.

*Sorite 2.3.1.*

(1) Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre normée telle que  $|\mathcal{K}|$  soit dense dans  $|\mathcal{A}|$ . Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , on a

$$(2.5) \quad |a| = |\varpi|^r, \quad \text{avec } r := \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}\}.$$

En particulier, la topologie de  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  est la topologie  $\varpi$ -adique, et  $\mathcal{A}$  est de Banach si et seulement si  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  est  $\varpi$ -adiquement complète.

(2) Réciproquement, soit  $\mathfrak{A}$  une  $\mathcal{K}^{\circ}$ -algèbre plate (i.e. sans  $\varpi$ -torsion), et posons

$$\mathcal{A} := \mathfrak{A} \left[ \frac{1}{\varpi} \right].$$

Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , posons

$$(2.6) \quad {}^{\mathfrak{A}}|a| := |\varpi|^r, \quad \text{avec } r := \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a \in \mathfrak{A}\} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

(a) Cela définit une semi-norme sur  $\mathcal{A}$ , qui est une norme si et seulement si aucun élément de  $\mathfrak{A} \setminus 0$  n'est infiniment  $\varpi$ -divisible ;  $|\mathcal{K}|$  est dense dans  ${}^{\mathfrak{A}}|\mathcal{A}|$ .

En outre  $\hat{\mathfrak{A}}$  est aussi une  $\mathcal{K}^{\circ}$ -algèbre plate,  $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathfrak{A}}[\frac{1}{\varpi}]$ , et  $\hat{\mathcal{A}}_{\leq 1} = \widehat{\mathcal{A}}_{\leq 1}$ .

(b)  $\mathcal{A}_{< 1} = \mathcal{K}^{\circ\circ}\mathfrak{A}$ ,

$\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathfrak{A}$  si  $\Gamma$  est discret,

$\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathfrak{A}_*$  en général<sup>11</sup>, avec  $\mathfrak{A}_* := \text{Hom}_{\mathcal{K}^{\circ}}(\mathcal{K}^{\circ\circ}, \mathfrak{A}) = \bigcap_{s \in \Gamma_{> 0}} \varpi_{-s}\mathfrak{A}$ .

(c) Un homomorphisme  $\phi : \mathcal{A} = \mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}] \rightarrow \mathcal{A}' = \mathfrak{A}'[\frac{1}{\varpi}]$  est continu si  $\phi(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}'$ , et est isométrique si en outre  $\phi^{-1}\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ . Plus précisément, un homomorphisme continu  $\phi$  est isométrique si et seulement si  $\phi(\mathcal{A}_{\leq 1}) \subset \mathcal{A}'_{\leq 1}$  et l'homomorphisme induit  $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi \rightarrow \mathcal{A}'_{\leq 1}/\varpi$  est injectif.

(d) Si  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$  est une sous-algèbre telle que le quotient  $\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}$  soit sans  $\varpi$ -torsion, la restriction de  ${}^{\mathfrak{A}'}|\cdot|$  à  $\mathfrak{A}$  est  ${}^{\mathfrak{A}}|\cdot|$ .

Si  $\mathfrak{I}$  est un idéal de  $\mathfrak{A}$  tel que  $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$  soit sans  $\varpi$ -torsion,  ${}^{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}}|\cdot|$  est la semi-norme quotient de  ${}^{\mathfrak{A}}|\cdot|$ . Réciproquement, pour tout idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{A}$ , alors  $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1}/\mathcal{I}_{\leq 1})_*$ .

<sup>11</sup> Notation empruntée à la presque-algèbre lorsque  $\Gamma$  est dense dans  $\mathbf{R}$ , auquel cas  $\mathcal{K}^{\circ\circ}$  est un idéal idempotent de  $\mathcal{K}^{\circ}$ , cf. §1 ; sinon,  $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{A}$ .



- (e) Soient  $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  deux  $\mathfrak{A}$ -algèbres sans  $\varpi$ -torsion. Alors la semi-norme associée à  $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})/(\varpi^\infty\text{-torsion})$  est la semi-norme produit tensoriel (où  $\varpi^\infty$ -torsion désigne la torsion  $\varpi$ -primaire). Réciproquement, si  $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  sont deux  $\mathfrak{A}$ -algèbres normées, on a

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})_{\leq 1} &= (\mathfrak{B}_{\leq 1} \otimes_{\mathfrak{A}_{\leq 1}} \mathfrak{C}_{\leq 1})/(\varpi^\infty\text{-tors}) \quad \text{si } \Gamma \text{ est discret,} \\ (\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})_{\leq 1} &= ((\mathfrak{B}_{\leq 1} \otimes_{\mathfrak{A}_{\leq 1}} \mathfrak{C}_{\leq 1})/(\varpi^\infty\text{-tors}))_* \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

De même pour les produits tensoriels complétés.

- (3) Le passage au quotient modulo  $\mathcal{A}^{00}$  (resp. à la complétion) induit une bijection entre les sous- $\mathcal{K}^0$ -algèbres  $\mathfrak{B}$  ouvertes [complètement] intégralement fermées dans  $\mathcal{A}^0$  et les sous- $k$ -algèbres [complètement] intégralement fermées de la  $k$ -algèbre réduite  $\mathcal{A}^0/\mathcal{A}^{00}$  (resp. les sous- $\mathcal{K}^0$ -algèbres ouvertes intégralement fermées dans  $\hat{\mathcal{A}}^0$ ).

Supposons  $|\mathcal{K}|$  dense dans  $|\mathcal{A}|$  (ce qui est le cas si  $\Gamma$  est dense dans  $\mathbf{R}$ ).

- (4) Pour  $\mathfrak{A}$  comme ci-dessus et  $\mathcal{A} = \mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}]$ , et avec les notations de 2.3.1 :

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^{\dagger} := \{a \in \mathcal{A} \mid \exists n, a^n \in \mathfrak{A}\}, \quad \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^+, \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^* := \{a \in \mathcal{A} \mid \exists m \forall n, \varpi^m a^n \in \mathfrak{A}\},$$

on a

$$(2.7) \quad \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^{\dagger} \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^+ \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^* = (\mathfrak{A}_{*})_{\mathcal{A}}^* = \mathcal{A}^0$$

et  $(\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^{\dagger})_* = (\mathcal{A}^0)_*$  est la boule unité de la semi-norme spectrale associée à  $|| \cdot ||$ .

En particulier, si  $\mathfrak{A}_{\leq 1}$  est noethérienne, sa fermeture intégrale dans  $\mathcal{A}$  est égale à  $\mathcal{A}^0$ .

- (5) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $|| \cdot ||$  est spectrale,
- (b)  $\mathfrak{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}^0$ ,
- (c)  $\mathfrak{A}_{\leq 1} = (\mathfrak{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^*$  ( $\mathfrak{A}_{\leq 1}$  est complètement intégralement fermé dans  $\mathcal{A}$ ),
- (d)  $\mathfrak{A}_{\leq 1} = (\mathfrak{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^{\dagger}$  ( $\mathfrak{A}_{\leq 1}$  est intégralement fermé dans  $\mathcal{A}$ ),
- (e)  $\mathfrak{A}_{\leq 1} = (\mathfrak{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^{\dagger}$  ( $\mathfrak{A}_{\leq 1}$  est  $p$ -radicalement fermé dans  $\mathcal{A}$ ),
- (f) (si  $|\varpi| \geq |p|$  et  $\frac{1}{p} \in \Gamma$ ) l'homomorphisme  $\mathfrak{A}_{\leq 1}/\varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathfrak{A}_{\leq 1}/\varpi$  est injectif.

- (6) Si  $\mathcal{A}$  est uniforme, on a

$$(2.8) \quad \mathcal{A}^0 = (\mathcal{A}^0)_* = (\mathfrak{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^* \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{A}}^0 = (\hat{\mathcal{A}})^0.$$

- (7) Si  $\mathcal{A}$  est de Banach,  $\mathcal{A}^{u0}$  est le complété-séparé de  $(\mathcal{A}^0)_*$  pour la semi-norme spectrale.

*Démonstration.* — (1) L'égalité  $|a| = |\varpi|^r$  est claire si  $|a| \in |\mathcal{K}^\times|$ ; elle vaut donc pour tout  $a \in \mathcal{A}$  compte tenu de la densité de  $|\mathcal{K}|$  dans  $|\mathcal{A}|$ .

(2) (a) Que  $^b || \cdot ||$  soit une semi-norme non-archimédienne découle directement de ce que  $\mathfrak{A}$  est une  $\mathcal{K}^0$ -algèbre. C'est une norme si  $\mathfrak{A}$  est  $\varpi$ -adiquement séparée.

Par platitude de  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}/\varpi^{n-1} \xrightarrow{\varpi} \mathfrak{A}/\varpi^n$  est injectif pour tout  $n$ , d'où, en passant à la limite, le fait que  $\hat{\mathfrak{A}}$  soit sans  $\varpi$ -torsion.

Les égalités  $\hat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}]}$ ,  $\hat{\mathcal{A}}_{\leq 1} = \widehat{\mathcal{A}_{\leq 1}}$ , de même que les points (a) (b) et la première assertion de (c) résultent de la définition de la semi-norme (en notant que  $\sup\{s \in \Gamma_{>0}\} > 0$  si  $\Gamma$  est discret, = 0 sinon). On a  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{A}_{\leq 1}}$ .

Complétons la preuve de (c). Puisque  $|\mathcal{K}|$  est dense dans  $\mathcal{A}$ ,  $\phi$  est isométrique si et seulement si  $\mathcal{A}_{\leq 1} \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \phi(\mathcal{A})$  est un isomorphisme. Comme l'injectivité de  $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi \rightarrow \mathcal{A}'_{\leq 1}/\varpi$  implique aussi celle de  $\phi$ , on peut supposer  $\phi$  injectif (et le noter comme une inclusion pour alléger). Il suffit donc de s'assurer que  $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \frac{1}{\varpi}\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}_{\leq 1} \Rightarrow \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}_{\leq 1}$  (la réciproque étant banale). Or pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \frac{1}{\varpi}\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\leq 1} \Rightarrow \varpi^n \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \frac{1}{\varpi}\mathcal{A}_{\leq 1} = \varpi^n \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \mathcal{A}_{\leq 1}$ , d'où aussi par récurrence  $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \frac{1}{\varpi^n}\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\leq 1}$ .

La première assertion de (d) résulte de (c) puisqu'on a  $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}] = \mathfrak{A}$ . Pour la seconde, en notant  $\bar{a}$  l'image d'un élément  $a \in \mathcal{A}$  modulo  $\mathfrak{J}[\frac{1}{\varpi}]$ , on observe que  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{J}[\frac{1}{\varpi}] = \mathfrak{J}$  de sorte que  $\sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}\bar{a} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{J}\} = \sup_{i \in \mathfrak{J}[\frac{1}{\varpi}]} \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a + i \in \mathfrak{A}\}$ . Pour l'assertion réciproque, on note que  $\mathcal{A}_{\leq 1}/\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$  est sans  $\varpi$ -torsion et on applique le point (b).

Pour (e), considérons une somme  $\sum b_n \otimes c_n$  avec  $|b_n||c_n| \leq 1$ . Dans le cas discret (*resp.* non discret), on la réécrit comme  $\sum \varpi_{r_n} b_n \otimes \varpi_{r_n}^{-1} c_n$  avec  $r_n$  égal à (*resp.* inférieur à, mais arbitrairement proche de) la valuation de  $y_n$ .

(3) Le cas de la complétion se déduit du cas de la réduction modulo  $\mathcal{A}^{oo}$ . Celle-ci induit une bijection entre sous  $\mathcal{K}^o$ -algèbres ouvertes  $\mathfrak{B}$  de  $\mathcal{A}^o$  et sous- $k$ -algèbres  $\bar{\mathfrak{B}}$  de  $\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo}$ . Le point est de montrer que  $\mathfrak{B}$  et  $\bar{\mathfrak{B}}$  sont simultanément intégralement fermés. Cela découle immédiatement de l'observation suivante :

*soient S un anneau, I un idéal, R un sous-anneau de S contenant I, s un élément de S et  $\bar{s}$  son image dans S/I. Alors s est entier sur R si et seulement si  $\bar{s}$  est entier sur R/I.*

En effet, la réduction modulo I induit une bijection entre sous-R-modules M de type fini de S contenant R et sous-R/I-modules  $\bar{M}$  de type fini de S/I contenant R/I. Que s soit entier sur R signifie que ses puissances engendrent un tel module M, et de même modulo I (le même argument vaut en remplaçant « intégralement fermé » par « complètement intégralement fermé »).

(4) Rappelons que  $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^*$  est l'ensemble des éléments de  $\mathcal{A}$  dont les puissances sont contenues dans un sous- $\mathfrak{A}$ -module de type fini. Puisque être contenu dans un sous- $\mathfrak{A}$ -module de type fini de  $\mathcal{A}$ , c'est être borné, on a  $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^* = \mathcal{A}^o$ .

La semi-norme  $|\cdot|^\dagger$  associée à  $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^\dagger$  est donnée par  $|a|^\dagger = |\varpi|^{r^\dagger}$  avec  $r^\dagger := \sup\{s \in \Gamma \mid \exists n, \varpi_{-sp^n} a^{p^n} \in \mathcal{A}_{\leq 1}\}$ . D'où  $|a|^\dagger = \inf |a^{p^n}|^{\frac{1}{p^n}}$ , et par le lemme de Fekete,  $|a|^\dagger = \lim |a^{p^n}|^{\frac{1}{p^n}} = |a|_{sp}$ .

La formule  $|a|^\dagger = \inf |a^{p^n}|^{\frac{1}{p^n}}$  montre aussi que  $(\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^\dagger)_*$  contient la boule unité de  $\mathcal{A}$  pour la semi-norme spectrale  $|\cdot|^\dagger$ . Par définition de  $\mathcal{A}^o$ , et compte tenu de (2b), on a donc  $\mathcal{A}^o \subset (\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^\dagger)_*$ , et en dernière instance  $\mathcal{A}_*^o = (\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^\dagger)_*$ .

(5) Les équivalences (a)  $\Leftrightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (c)  $\Leftrightarrow$  (d)  $\Leftrightarrow$  (e) résultent de (2b) et (4), et si  $|\varpi| \geq |\rho|$  et  $\frac{1}{p} \in \Gamma$ , on a (e)  $\Leftrightarrow$  (f).

(6) On peut supposer  $||$  spectrale. Alors (2b) et (5b) entraînent que  $(\mathcal{A}^o)_* = \mathcal{A}^o$ . L'autre égalité suit de (2.7), de même que  $\widehat{\mathcal{A}}^o = (\widehat{\mathcal{A}})^o$  via le point (2a) (avec  $||_{sp}$ ).

(7) résulte de ce que  $(\mathcal{A}^o)_*$  est la boule unité de la semi-norme spectrale (point (4)) et de la définition de  $\mathcal{A}^u$ .  $\square$

**2.3.3. Remarques.** — (1)  $\mathcal{A}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{A}^o/\varpi$  est toujours injectif même si  $\mathcal{A}$  n'est pas uniforme.

(2) Au point (4), il se peut que les inclusions  $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^+ \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^* = \mathcal{A}^o \subset \mathcal{A}_{||_{sp} \leq 1}$  soient strictes, comme le montre l'exemple  $\mathfrak{A} = \mathcal{K}^o[\varpi T, \dots, \varpi^{i+1} T^{p^i}, \dots] \subset \mathcal{K}^o[T]$  : on a  $|T^m| = |\varpi|^{-1 - \lfloor \log_p m \rfloor}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{K}[T]$ ,  $\mathcal{A}^o = \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^* = \mathcal{K}^o + \mathcal{K}^{oo} T \mathcal{K}^o[T]$  et  $\mathcal{A}_{\mathcal{A}}^{o*} = \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^{**} = \mathcal{K}^o[T]$ , tandis que  $\mathcal{A}_{\mathcal{A}}^{o+} = \mathcal{A}^o$ . On voit là un exemple de fermeture complètement intégrale  $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}^*$  qui n'est pas complètement intégralement fermée, et un exemple où  $\mathcal{A}^o$  n'est pas la boule unité de la norme spectrale.

**2.3.4.** Tirons-en les premiers fruits, en supposant  $|\mathcal{K}|$  dense dans  $\mathbf{R}_+$ .

*Corollaire 2.3.2.* — *Le foncteur  $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^o$  induit une équivalence de la catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes vers celle des  $\mathcal{K}^o$ -algèbres  $\mathfrak{B}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- (1)  $\mathfrak{B}$  est plate sur  $\mathcal{K}^o$ ,
- (2)  $\mathfrak{B}$  est  $\varpi$ -adiquement complète,
- (3)  $\mathfrak{B}$  est [ $p$ -radicalement/intégralement/complètement intégralement] fermée dans  $\mathfrak{B}[\frac{1}{\varpi}]$ ,
- (4)  $\mathfrak{B} = \text{Hom}_{\mathcal{K}^o}(\mathcal{K}^{oo}, \mathfrak{B})$ .

Un quasi-inverse est donné par  $\mathfrak{B} \mapsto (\mathfrak{B}[\frac{1}{\varpi}], {}^{\mathfrak{B}}||)$ . Idem pour les  $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach uniformes (resp.  $\mathcal{A}^o$ -algèbres vérifiant (1) à (4)).

Sous (4), les trois interprétations de (3) équivalent à :  ${}^{\mathfrak{B}}||$  est spectrale (points (2)(b) et (5) du sorite).

*Corollaire 2.3.3.* — *Soit  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme. Il y a bijection entre les idempotents de  $\mathcal{B}$ , ceux de  $\mathcal{B}^o$ , ceux de  $\mathcal{B}^o/\varpi$ , et ceux de  $\mathcal{B}^o/\mathcal{B}^{oo}$ .*

On peut supposer  $\mathcal{B}$  spectrale. Pour la première bijection, voir 2.2.6. Pour la seconde, le point est que  $\mathcal{B}^o$  est  $\varpi$ -adiquement complète ; pour la troisième, que le noyau de  $\mathcal{B}^o/\varpi \rightarrow \mathcal{B}^o/\mathcal{B}^{oo}$  est un nil-idéal.

*Lemme 2.3.4.* — *Soient  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme et  $\mathfrak{m}$  un idéal idempotent de  $\mathcal{A}^o$  tel que  $\mathcal{K}^{oo}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ . Considérons l'endofoncteur des  $\mathcal{A}^o$ -algèbres donné par les presque-éléments du localisé, dans le cadre  $(\mathcal{A}^o, \mathfrak{m})$  :*

$$(2.9) \quad \mathfrak{B} \mapsto (\mathfrak{B}^a)_* = \text{Hom}_{\mathcal{A}^{oa}}(\mathcal{A}^{oa}, \mathfrak{B}^a) = \text{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}).$$

Ce foncteur respecte chacune des conditions (1) à (4) du corollaire précédent. En particulier, le foncteur des presque-éléments est adjoint à droite de  $(\ )^a$  sur la catégorie des  $\mathcal{A}^0$ -algèbres vérifiant (1) à (4), donc commute aux limites.

On passe du cadre initial  $(\mathcal{K}^0, \mathcal{K}^{00})$  à  $(\mathcal{A}^0, \mathfrak{m})$  via  $(\mathcal{A}^0, \mathcal{K}^{00}\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}^{00})$ , le sens de « presque » étant le même dans  $(\mathcal{K}^0, \mathcal{K}^{00})$  et dans  $(\mathcal{A}^0, \mathcal{K}^{00}\mathcal{A}^0)$  (cf. §1.5).

*Démonstration.* — (1) : si  $\mathfrak{B}$  est sans  $\varpi$ -torsion, il en est de même de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$ .

(2) est plus délicat car le foncteur  $\mathfrak{B} \mapsto (\mathfrak{B}^a)_*$ , qui commute aux limites, ne commute pas au quotient par  $\varpi^n$  en général. On a toutefois un morphisme canonique  $u : (\widehat{\mathfrak{B}^a})_* \rightarrow (\hat{\mathfrak{B}}^a)_*$  obtenu en prenant la limite des morphismes  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})/\varpi^n \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}/\varpi^n)$ . Ces derniers sont injectifs (le noyau de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}/\varpi^n)$  est l'image de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \varpi^n \mathcal{A}^0 \otimes_{\mathcal{A}^0} \mathfrak{B}) = \varpi^n \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$ ), donc  $u$  est injectif. Du triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}) & \longrightarrow & \lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})/\varpi^n \\ \downarrow & & \downarrow u \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \lim \mathfrak{B}/\varpi^n) & = & \lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}/\varpi^n) \end{array}$$

on déduit que si  $\mathfrak{B}$  est  $\varpi$ -adiquement complète,  $u$  est inverse à gauche du morphisme de complétion  $(\mathfrak{B}^a)_* \mapsto (\widehat{\mathfrak{B}^a})_*$ . C'est donc un isomorphisme.

(3) : soit  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})[\frac{1}{\varpi}]$  tel que  $\varpi f, f^p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$ . Alors pour tout  $\eta \in \tilde{\mathfrak{m}}$ , on a  $\varpi f(\eta), f(\eta)^p \in \mathfrak{B}$ . Par hypothèse ceci implique  $f(\eta) \in \mathfrak{B}$ . On conclut que  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$ .

(4) :  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^0}(\mathcal{K}^{00}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\mathcal{K}^{00} \otimes_{\mathcal{K}^0} \mathcal{A}^0, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\mathcal{K}^{00} \otimes_{\mathcal{K}^0} \tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^0}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$ .  $\square$

**2.3.5. Remarques.** — (1) En revanche, l'adjoint à gauche  $(\ )_{\#}$  de  $(\ )^a$  ne respecte pas les conditions (2) à (4). Mais on peut le modifier en un adjoint à gauche  $(\ )_{\#}$  de  $(\ )^a$  sur la catégorie des  $\mathcal{A}^0$ -algèbres  $\mathfrak{B}$  vérifiant (1) à (4). Il suffit de

- (a) quotienter  $\mathfrak{B}_{\#}$  par la torsion  $\varpi$ -primaire (pour assurer (1)),
- (b) compléter pour assurer (2),
- (c) passer à la fermeture  $[p$ -radicielle/intégrale dans le  $\frac{1}{\varpi}$ -localisé (ce qui assure (3)),
- (d) prendre les presque-éléments dans le cadre  $(\mathcal{K}^0, \mathcal{K}^{00})$  (ce qui assure (4)),

compte tenu de ce que chacune de ces opérations est un réflecteur (d'après le sorite 2.3.1 (4), elles ne se détruisent pas l'une l'autre - les deux dernières reviennent à passer à l'anneau des éléments de puissances bornées dans le  $\frac{1}{\varpi}$ -localisé).

(2) De même, le coproduit de la catégorie des  $\mathcal{A}^0$ -algèbres vérifiant (1) à (4) n'est pas  $\otimes$  (qui ne respecte pas (2) ni (3) ni (4)) mais le bifoncteur donné par le complété

$\mathfrak{B} \hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}^u \mathfrak{C}$  de la fermeture complètement intégrale de  $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})/(\varpi^\infty\text{-tors})$  dans  $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})[\frac{1}{\varpi}]$ .

**2.3.6.** L'extension de la presque-algèbre au contexte topologique pose problème : la catégorie des modules topologiques et homomorphismes continus n'est pas abélienne. Pour les algèbres de Banach uniformes, on peut néanmoins en esquisser un avatar à partir des résultats précédents : une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme étant fixée, la catégorie  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-uBan}$  des  $\mathcal{A}^{\hat{a}}$ -algèbres de Banach uniformes a pour objets les  $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach uniformes, notées  $\mathcal{B}^{\hat{a}}$ , et les morphismes  $\mathcal{B}^{\hat{a}} \rightarrow \mathcal{C}^{\hat{a}}$  sont les morphismes  $\mathcal{B}^{oa} \rightarrow \mathcal{C}^{oa}$  (dans le cadre  $(\mathcal{A}^o, \mathfrak{m})$ ). Si le cadre est  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ , cette catégorie est bien entendu isomorphe à celle des  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes).

On a un foncteur évident  $(\ )^{\hat{a}} : \mathcal{A}\text{-uBan} \rightarrow \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-uBan}$  qui est l'identité sur les objets. D'après le lemme précédent,  $(\ )^{\hat{a}}$  admet un adjoint à droite  $(\ )_{\hat{*}}$  dont l'unité d'adjonction est

$$(2.10) \quad \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{*}} = (\mathcal{B}^{oa})_{*} \left[ \frac{1}{\varpi} \right] = \text{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathcal{B}^o) \left[ \frac{1}{\varpi} \right] = \text{Hom}_{\mathcal{A}}^{cont}(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Ce morphisme est injectif si  $\mathfrak{m}$  agit fidèlement sur  $\mathcal{B}$ . On a  $((\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{*}})^o = \text{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathcal{B}^o)$ .

D'autre part,  $(\ )^{\hat{a}}$  admet un adjoint à gauche encore noté  $(\ )_{\hat{\dagger}}$ .

Comme on le verra ci-dessous (§2.5.4), l'inclusion dans l'algèbre des presque-éléments

$$(\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{*}} \subset (\mathcal{B}^a)_{*} := \text{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathcal{B}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{B})$$

n'est pas une égalité en général. On a toutefois :

*Lemme 2.3.5.* — Soit  $\mathcal{B} \xrightarrow{\phi} \mathcal{C}$  un morphisme de  $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach uniformes, et soit  $\mathcal{B}^o \xrightarrow{\phi^o} \mathcal{C}^o$  sa restriction. Alors, dans le cadre  $(\mathcal{A}^o, \mathfrak{m})$ ,  $\phi$  est un presque-isomorphisme si et seulement si  $\phi^o$  l'est (c'est-à-dire si  $\phi^{\hat{a}}$  est un isomorphisme).

*Démonstration.* — Il est clair que si  $(\phi^o)^a$  est un isomorphisme, il en est de même de  $\phi^{\hat{a}}$ , et que si  $\phi^{\hat{a}}$  est un monomorphisme, il en est de même de  $(\phi^o)^a$ .

Réciproquement, si  $\phi^{\hat{a}} = \phi^{oa}$  est un isomorphisme, il en est de même de  $(\phi^a)_{\hat{\dagger}} = (\phi^{oa})_{\hat{\dagger}}[\frac{1}{\varpi}]$  (cf. rem. 2.3.5). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{B}^{oa})_{\hat{\dagger}} & \rightarrow & (\mathcal{B}^{oa})_{\hat{\dagger}} & \rightarrow & \mathcal{B}^o \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \phi^o \\ (\mathcal{C}^{oa})_{\hat{\dagger}} & \rightarrow & (\mathcal{C}^{oa})_{\hat{\dagger}} & \rightarrow & \mathcal{C}^o \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale du milieu est un isomorphisme, et le composé des flèches du bas est un presque-isomorphisme. Cela implique que  $\phi^o$  est presque surjectif.  $\square$

**2.4.** *Extensions entières d'algèbres normées uniformes.*

**2.4.1.** Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre normée uniforme. Soit  $\mathcal{B}$  une extension de  $\mathcal{A}$ , munie d'une norme prolongeant celle de  $\mathcal{A}$ . On a  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^0 = \mathcal{A}^0$ .

*Lemme 2.4.1.*

- (1) *La fermeture complètement intégrale de  $\mathcal{A}^0$  dans  $\mathcal{B}$  est contenue dans  $\mathcal{B}^0$ . En particulier,  $\mathcal{A}^0$  est complètement intégralement fermé dans  $\mathcal{A}$ .  
Supposons qu'un groupe fini  $G$  agisse sur  $\mathcal{B}$  et que  $\mathcal{B}^G = \mathcal{A}$ .*
- (2) *Supposons que  $G$  préserve la norme (ce qui est le cas en particulier si celle-ci est spectrale complète). Alors  $\mathcal{B}^{oG} = \mathcal{A}^0$ ,  $\mathcal{B}$  est entier sur  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}^0$  est entier sur  $\mathcal{A}^0$ , et la fermeture intégrale de  $\mathcal{A}^0$  dans  $\mathcal{B}$  est  $\mathcal{B}^0$ .*
- (3) *Supposons en outre  $\mathcal{B}$  soit uniforme. Alors  $||_{sp}$  est l'unique norme spectrale  $G$ -invariante sur  $\mathcal{B}$  étendant la norme spectrale de  $\mathcal{A}$ .*
- (4) *Supposons de surcroît que la norme de  $\mathcal{B}$  soit spectrale, et soit  $g$  un élément de  $\mathcal{A}$ . Si la multiplication par  $g$  dans  $\mathcal{A}$  est injective (resp. isométrique), il en est de même de la multiplication par  $g$  dans  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* — (1) Soit  $b \in \mathcal{B}$  tel qu'il existe un sous- $\mathcal{A}^0$ -module de type fini de  $\mathcal{B}$  qui contient toutes les puissances de  $b$ . Comme  $\mathcal{A}^0$  est borné et  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est continu, ce sous-module est borné, donc  $b \in \mathcal{B}^0$ .

(2) Par hypothèse,  $G$  préserve  $\mathcal{B}^0$ . On a  $\mathcal{B}^G = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^0 = \mathcal{A}^0$ . Par ailleurs, tout anneau muni d'une action d'un groupe fini est entier sur l'anneau des invariants [8, V, §1, n. 9, prop. 22]. En particulier,  $\mathcal{B}$  est entier sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}^0$  est entier sur  $\mathcal{A}^0$ . Compte tenu du point (1), cela entraîne que  $\mathcal{B}^0$  est la fermeture intégrale de  $\mathcal{A}^0$  dans  $\mathcal{B}$ .

Notons par ailleurs que si la norme est spectrale complète, elle est unique avec cette propriété (cf. 2.2.2), donc préservée par  $G$ .

(3)  $||_{sp}$  est une norme spectrale  $G$ -invariante étendant la norme spectrale de  $\mathcal{A}$ . Soit  $||'$  une autre telle norme. Soit  $b \in \mathcal{B}$  et considérons le polynôme

$$\prod_{\gamma \in G} (T - \gamma(b)) = T^d + \sum_{i=1}^{i=d} a_i T^{d-i} \in \mathcal{A}[T].$$

D'après [6, 3.1.2, prop. 1], on a

$$(2.11) \quad \max_{\gamma} |\gamma(b)|' = \max |a_i|^{\frac{1}{i}},$$

d'où  $\max_{\gamma} |\gamma(b)|' = \max_{\gamma} |\gamma(b)|_{sp}$ , et on conclut que  $||' = ||_{sp}$  par  $G$ -invariance.

(4) découle de la même formule : si  $b \in \mathcal{B}$  est remplacé par  $ab$  ( $a \in \mathcal{A}$ ), les  $a_i$  le sont par  $a^i a_i$ , de sorte que  $|ab| = \max |a^i a_i|^{\frac{1}{i}}$ .  $\square$

Sans l'hypothèse d'invariance de la norme dans (2),  $\mathcal{B}^0$  peut ne pas être entier sur  $\mathcal{A}^0$ . Sous l'hypothèse (2),  $\mathcal{B}$  n'est pas nécessairement fini sur  $\mathcal{A}$ , et même s'il l'est,  $\mathcal{B}^0$  n'est pas nécessairement fini sur  $\mathcal{A}^0$ , comme le montrent les exemples ci-dessous.

**2.4.2. Exemples prophylactiques.** — (1) Soit  $V$  un anneau de valuation discrète complet de car.  $\neq 2$ , d'uniformisante  $\varpi$ . Soient  $A = V[[T]]$  et  $B$  la fermeture intégrale de  $A$  dans une extension finie galoisienne de groupe  $G$  du corps de fractions  $\mathbb{Q}(A)$  de  $A$ ;  $B$  est alors une extension finie de  $A$ . Munissons  $\mathcal{A} = A[\frac{1}{\varpi}]$ , resp.  $\mathcal{B} = B[\frac{1}{\varpi}]$ , de la norme  $^A|\cdot|$  (norme multiplicative  $\varpi$ -adique), resp.  $^B|\cdot|$ . Ce sont des algèbres de Banach uniformes, on a  $\mathcal{A}^0 = A$ ,  $\mathcal{B}^0 = B$ , et  $G$  agit par isométries.

Soit par exemple  $B = A[U]/(U^2 - TU + \varpi)$ , de sorte que  $\mathcal{B} = \mathcal{A}[\sqrt{T^2 - 4\varpi}]$ . Le polynôme  $U^2 - TU + \varpi$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}(A)$ , mais se factorise dans  $\widehat{\mathbb{Q}(A)}$ , et même dans  $\widehat{A[\frac{1}{T}]}$  : les racines sont  $u = \frac{\varpi}{T} + \sum_1^\infty \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))2^n \varpi^{n+1}}{(n+1)!T^{2n+1}}$  et  $T - u$ . Ainsi  $B$  admet deux normes multiplicatives induisant celle de  $A$ , pour lesquelles  $U$ , resp.  $T - U$ , est une unité. L'algèbre  $\mathcal{B}' := B[\frac{1}{\varpi}]$  munie de cette dernière norme (non  $G$ -invariante ni complète) contient  $\frac{U}{\varpi} = \frac{1}{T-U}$  qui est de norme 1 mais n'est pas entier sur  $A$ . La topologie de  $(\mathcal{B}')^0$  est la topologie  $\varpi$ -adique, tandis que celle induite sur  $B$  n'est pas  $\varpi$ -adique, mais  $U$ -adique (moins fine).

(2) Supposons  $\mathcal{K}$  parfait de caractéristique 2. Soit  $\mathcal{A} = \mathcal{K}^0[[T^{\frac{1}{2^\infty}}]] \otimes_{\mathcal{K}^0} \mathcal{K}$ , et soit  $\mathcal{B}$  la clôture radicielle de l'extension quadratique  $\mathcal{A}[U]/(U^2 - TU - 1)$ . Entière sur  $\mathcal{A}$ , elle est contenue dans  $\frac{1}{T}(\mathcal{A} + \mathcal{A}U)$ . On calcule

$$U^{\frac{1}{2}} = T^{-\frac{1}{2}}(U - 1), \quad \dots, \quad U^{\frac{1}{2^i}} = T^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^i}}(U - \alpha_i), \quad \alpha_i \in \mathcal{A},$$

d'où  $\mathcal{B}/\mathcal{A} = \bigcup_i T^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^i}} U \mathcal{A} = \frac{U}{T} T^{\frac{1}{2^\infty}} \mathcal{A}$ , qui n'est pas de type fini sur  $\mathcal{A}$ . Donc  $\mathcal{B}$  n'est pas non plus. Par ailleurs, une rétraction  $\mathcal{A}$ -linéaire de  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  enverrait  $U^{\frac{1}{2}}$  sur  $1 + a_i \in \mathcal{A}$  avec  $a_i = T^{\frac{1}{2^i}}(1 + a_{i-1})$ . Or  $a_0 = T^{\frac{1}{2}}(1 + a_1) = T^{\frac{1}{2}} + \dots + T^{\frac{1}{2^{i-1}}} + T^{\frac{1}{2^i}}(1 + a_i)$  et pour  $i \rightarrow \infty$ , la série ne converge pas dans  $\mathcal{A}$ . Une telle rétraction n'existe donc pas.

(3) Même si  $\mathcal{B}$  est finie sur  $\mathcal{A}$  et si  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est scindée,  $\mathcal{B}^0$  n'est pas nécessairement finie sur  $\mathcal{A}^0$ , et l'application  $\mathcal{A}^0$ -linéaire  $\mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{B}^0$  n'est pas nécessairement scindée : prenons pour  $\mathcal{A}$  le corps  $\mathcal{K}$  précédent lui-même, et pour  $\mathcal{B}$  l'extension quadratique  $\mathcal{K}[U]/(U^2 - \varpi U - 1)$ , où  $\varpi \in \mathcal{K}^0 \setminus 0$ . Alors  $\mathcal{B}^0$  est la fermeture intégrale de  $\mathcal{K}^0$  dans  $\mathcal{B}$ , et c'est aussi la clôture radicielle de  $\mathcal{K}^0[U]$ , mais le  $\mathcal{K}^0$ -module  $\mathcal{B}^0/\mathcal{K}^0 = \frac{U}{\varpi} T^{\frac{1}{2^\infty}} \mathcal{K}^0$  n'est pas de type fini, et il n'y a pas de rétraction  $\mathcal{K}^0$ -linéaire de  $\mathcal{K}^0 \rightarrow \mathcal{B}^0$ . Pour un exemple diadique de même farine, voir [6, 6.4.1].

**2.4.3.** Passons aux extensions étales finies d'algèbres de Banach uniformes.

*Lemme 2.4.2.* — Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme. L'oubli de la norme induit un foncteur pleinement fidèle

$$\{\mathcal{A}\text{-algèbres de Banach uniformes étales finies}\} \rightarrow \{\mathcal{A}\text{-algèbres étales finies}\}.$$

*Démonstration.* — La fidélité est claire. Pour la plénitude, observant qu'un quotient  $\mathcal{B}'$  d'une  $\mathcal{A}$ -algèbre étale finie  $\mathcal{B}$  est facteur direct ( $\text{Spec } \mathcal{B}'$  est ouvert et fermé dans  $\text{Spec } \mathcal{B}$ ), on se ramène au cas des isomorphismes, qui sont isométriques en vertu de l'unicité de la norme spectrale complète.  $\square$

**2.4.4. Remarque.** — C'est en fait une équivalence de catégories, cf. [21, prop. 2.8.16 (b)] (compte tenu de ce que  $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{A}$ -algèbre finie projective en tant que module, elle est munie d'une classe d'équivalence canonique de normes complètes; le point délicat est de vérifier qu'elles sont uniformes). Nous n'aurons pas besoin de ce fait.

## 2.5. Monomorphismes (et recadrage).

**2.5.1.** Les monomorphismes de  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  sont les homomorphismes continus injectifs. Il est clair que tout morphisme injectif  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un monomorphisme. Pour la réciproque, on peut supposer  $\mathcal{A}$  non nulle; alors  $\mathcal{K} \oplus \ker \phi \subset \mathcal{A}$  est une sous-algèbre de Banach de  $\mathcal{A}$ . On conclut en considérant les deux morphismes  $\mathcal{K} \oplus \ker \phi \rightarrow \mathcal{A}$  qui envoient  $\ker \phi$  sur lui-même et sur 0 respectivement.

Cela découle aussi formellement du fait que  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  admet des *objets libres* :  $S \mapsto \mathcal{K}\langle T_s \rangle_{s \in S}$  est adjoint à gauche du foncteur oubli  $\mathcal{K}\text{-uBan} \rightarrow \mathbf{Ens}$ .

**2.5.2.** Supposons  $|\mathcal{K}|$  dense dans  $\mathbf{R}_+$ . Les recadrages du type considéré au §2.3.6 donnent parfois naissance à des monomorphismes d'algèbres de Banach uniformes, cf. (2.10). Examinons en détail le cas, fondamental dans la suite, du passage du cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$  au cadre

$$(\mathfrak{V} = \mathcal{K}^o\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle := \widehat{\mathcal{K}^o[T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}}]}, \quad \mathfrak{m} = T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \mathfrak{V}^{oo} = (T)_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \mathcal{K}^{oo} \mathfrak{V}).$$

On a  $\mathcal{K}\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle^o = \mathcal{K}^o\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle$ , et  $\mathfrak{m}$  est plat donc  $\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}}$ .

Si  $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme, la donnée d'un morphisme  $\mathcal{K}\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle^o \rightarrow \mathcal{B}$  équivaut à celle d'une suite  $(g^{\frac{1}{p^m}})$  compatible de racines  $p^m$ -ièmes d'un élément  $g \in \mathcal{B}^o$  ( $g^{\frac{1}{p^m}}$  sera l'image de  $T_{p^m}^{\frac{1}{p}}$ ).

*Lemme 2.5.1.* — Soient  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{K}\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle$ -algèbre de Banach uniforme, et  $g$  l'image de  $T$ .

- (1) L'homomorphisme canonique  $(\mathcal{B}^{oa})_* \rightarrow \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$  est injectif, et son image est  $\varpi$ -adiquement complète et égale à

$$(2.12) \quad g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o := \bigcap g^{-\frac{1}{p^m}} \mathcal{B}^o.$$

- (2) L'homomorphisme  $\mathcal{B}^o \rightarrow (\mathcal{B}^{oa})_*$  est injectif si et seulement si  $g$  n'est pas diviseur de zéro dans  $\mathcal{B}$ .



(3) L'homomorphisme  $(\mathcal{B}^{oa})_*/\varpi \rightarrow (\mathcal{B}^{oa}/\varpi)_*$  est injectif.

(La notation  $( )_*$  est relative au cadre  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{m})$ ).

*Démonstration.* — (1) Puisque  $\mathcal{B}$  est uniforme,  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}^{oo}, \mathcal{B}^o) = \mathcal{B}^o$  (2.3.1 (6)). Comme  $\mathfrak{m} = \varinjlim_{\cdot \Gamma^{\frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^{m+1}}}} \mathfrak{A}^{oo}$ , on obtient

$$(2.13) \quad (\mathcal{B}^{oa})_* = \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{m}, \mathcal{B}^o) = \varprojlim_{\cdot g^{\frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^{m+1}}}} \mathcal{B}^o.$$

En particulier,  $(\mathcal{B}^{oa})_*$  est réduite tout comme  $\mathcal{B}^o$ . Ceci entraîne que la multiplication par  $g$  dans  $(\mathcal{B}^{oa})_*$  est presque injective : si  $gb = 0$ , alors  $(g^{\frac{1}{p^m}} b)^{p^m} = 0$ , donc  $g^{\frac{1}{p^m}} b = 0$ . Enfin, comme  $(\mathcal{B}^{oa})_*$  est sans  $\mathfrak{m}$ -torsion, on conclut que  $(\mathcal{B}^{oa})_* \rightarrow \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$  est injectif, et la formule (2.13) montre que

$$(2.14) \quad (\mathcal{B}^{oa})_* \cong g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$$

qui est  $\varpi$ -adiquement complète d'après le lemme 2.3.4. (2) en découle.

(3) Comme  $\mathcal{B}^o$  est sans  $\varpi$ -torsion, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \varprojlim_{\cdot g^{\frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^{m+1}}}} \mathcal{B}^o \xrightarrow{\varpi} \varprojlim_{\cdot g^{\frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^{m+1}}}} \mathcal{B}^o \rightarrow \varprojlim_{\cdot g^{\frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^{m+1}}}} (\mathcal{B}^o/\varpi). \quad \square$$

Pour comparer  $(g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o)[\frac{1}{\varpi}]$  à  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}$  (qui la contient), définissons, pour tout élément  $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}$ , la quantité

$$(2.15) \quad |b|_{g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}} := \sup_m |g^{\frac{1}{p^m}} b|_{\mathcal{B}} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

Elle vérifie les propriétés d'une norme excepté qu'elle peut prendre la valeur  $+\infty$ . L'ensemble des  $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}$  pour lesquels  $|b|_{g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}} < \infty$  forme une algèbre de Banach uniforme (spectrale si  $\mathcal{B}$  l'est). L'algèbre spectrale associée n'est autre que  $\mathcal{B}_*^{\hat{a}}$  (cf. 2.3.6) : le sous-anneau  $(g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B})^o$  formé des éléments dont les puissances sont bornées eu égard à  $|\cdot|_{g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}}$  vérifie

$$(2.16) \quad (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B})^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o,$$

car  $b \in (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B})^o \Leftrightarrow \sup_{\ell, m} |(g^{\frac{1}{p^m}} b)^\ell| < \infty \Leftrightarrow b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$ .

*Lemme 2.5.2.* — Si  $g$  est inversible dans  $\mathcal{B}$ , alors  $\mathcal{B}^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$ .

*Démonstration.* — Par uniformité, il existe alors une suite  $\lambda_m \in \mathcal{K}^o$ , de norme tendant vers 1, telle que  $\lambda_m g^{-\frac{1}{p^m}} \in \mathcal{B}^o$ . Tout  $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$  vérifie alors  $\lambda_m b \in \mathcal{B}^o$ , d'où  $b \in \mathcal{B}^o$ .  $\square$

**2.5.3. Remarques.** — (1) Si la multiplication par  $g$  est isométrique,  $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}] \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}^o$ , les idéaux  $g^{\frac{1}{p^m}} \mathcal{B}^o$  de  $\mathcal{B}^o$  sont fermés,  $\mathcal{B}^o \hookrightarrow g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$  est isométrique, et  $\| \cdot \|_{g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}}$  est une norme qui fait de  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}$  une algèbre de Banach uniforme. On a alors

$$(2.17) \quad g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B} = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o \left[ \frac{1}{p} \right] = \mathcal{B}_*$$

dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}], (\mathbb{T})^{\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{K}^{oo} \mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}])$ . En revanche, si la multiplication par  $g$  n'est pas isométrique et même si  $g$  est non-diviseur de zéro, non seulement l'inclusion  $\mathcal{B}^o \hookrightarrow g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$  n'est pas nécessairement isométrique, mais  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}]$  peut être distincte de  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}$  comme le montre l'exemple 2.5.4 ci-dessous.

(2) L'inclusion  $\mathcal{B}^o \subset g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$  est en général stricte, même si la multiplication par  $g$  est isométrique, comme le montre l'exemple du complété de  $\mathcal{K} + \mathbb{T}_1^{\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{K} \langle \mathbb{T}_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \mathbb{T}_2^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  dans  $\mathcal{K} \langle \mathbb{T}_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \mathbb{T}_2^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ ,  $g = \mathbb{T}_1$ .

**2.5.4. Exemple prophylactique.** — Supposons  $\mathcal{K}$  parfait de car.  $p$ . La  $\mathcal{K}^o$ -algèbre parfaite  $\mathcal{K}^o \langle \mathbb{T}_1^{\frac{1}{p^\infty}}, (\varpi^m \mathbb{T}_1^{\frac{1}{p^m}} \mathbb{T}_2)^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle_{m \in \mathbf{N}}$  est de la forme  $\mathcal{B}^o$  pour une  $\mathcal{K} \langle \mathbb{T}_1^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{B}$ . On a  $\mathcal{B} = \mathbb{T}_1^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}] \neq \mathbb{T}_1^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B} \ni \mathbb{T}_2$ .

**2.5.5.** Supposons  $g$  non-diviseur de zéro. Rappelons que la fermeture complètement intégrale de  $\mathcal{B}^o$  dans  $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$  (resp.  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}] = \mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi g}]$ ) est

$$(2.18) \quad \mathcal{B}_{\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]}^{o*} := \left\{ b \in \mathcal{B}^o \left[ \frac{1}{g} \right] \mid \exists m \forall n, g^m b^n \in \mathcal{B}^o \right\}$$

$$(2.19) \quad \left( \text{resp. } \mathcal{B}_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}^{o*} := \left\{ b \in \mathcal{B} \left[ \frac{1}{g} \right] \mid \exists m \forall n, (\varpi g)^m b^n \in \mathcal{B}^o \right\} \right),$$

et remarquons en passant que si  $G$  est un groupe d'automorphismes de  $\mathcal{B}^o$  qui fixe  $g$ , on a

$$(2.20) \quad (\mathcal{B}_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}^{o*})^G = \mathcal{B}_{\mathcal{B}^G[\frac{1}{g}]}^{o*}.$$

**Lemme 2.5.3.** — Soient  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{K} \langle \mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre de Banach uniforme (voire une algèbre normée uniforme), et  $g$  l'image de  $\mathbb{T}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o = (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o)_{\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]}^\dagger \quad (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o \text{ est } p\text{-radicalement fermé dans } \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]),$$

- (2)  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o = (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o)^\dagger_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]} (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o \text{ est } p\text{-radiciellement fermé dans } \mathcal{B}[\frac{1}{g}]),$   
(3)  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o = (\mathcal{B}^o)_{\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]}^*,$   
(4)  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o = (\mathcal{B}^o)_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}^*,$   
(5)  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o \text{ est complètement intégralement fermé dans } \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}].$   
(6)  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o \text{ est complètement intégralement fermé dans } \mathcal{B}[\frac{1}{g}].$

*Démonstration.* — On a  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o \subset \mathcal{B}_{\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]}^* \subset \mathcal{B}_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}^* \subset (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o)_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}^*$  et (6) implique toutes les autres conditions. Il reste à prouver (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (6).

(1)  $\Rightarrow$  (2) : on peut supposer  $\mathcal{B}$  spectrale. Soit  $b \in \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$  tel que  $b^p \in g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$ . Soit  $m$  tel que  $g^m b \in \mathcal{B}$ . On a  $(g^m b)^p \in \mathcal{B}^o$ , d'où  $g^m b \in \mathcal{B}^o$ . Donc  $b \in \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$  compte tenu du point (5) du sorite 2.3.1, et (1) implique  $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$ .

(2)  $\Rightarrow$  (6) : Soit  $b \in (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o)_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}^*$  : il existe  $m$  tel que pour tout  $n$ ,  $(\varpi g)^m b^{p^n} \in g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$ , donc  $\varpi_{p^m} g^{\frac{m}{p^m}} b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$  d'après (1). Ceci valant pour tout  $n$ , on conclut que  $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$  compte tenu du point (6) du sorite 2.3.1.  $\square$

**2.5.6. Remarque.** — Ce dernier argument montre aussi que pour anneau  $\mathbf{R}$  contenant une suite compatible  $t^{\frac{1}{p^m}}$  de racines d'un non-diviseur de zéro  $t$ , on a  $\mathbf{R}_{\mathbf{R}[\frac{1}{t}]}^* = t^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathbf{R}_{\mathbf{R}[\frac{1}{t}]}^\dagger$ .

## 2.6. Epimorphismes (et localisation).

**2.6.1.** Dans  $\mathcal{K}\text{-uBan}$ , tout morphisme d'image dense est un épimorphisme. Un épimorphisme  $\phi$  est dit *extrémal* si dans toute factorisation  $\phi = \mu \circ \lambda$  où  $\mu$  est un monomorphisme,  $\mu$  est un isomorphisme. Dans  $\mathcal{K}\text{-uBan}$ , tout morphisme  $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$  admet une factorisation canonique  $\mathcal{A} \xrightarrow{\psi} (\mathcal{A}/\ker \phi)^u \xrightarrow{\chi} \mathcal{B}$  et  $\psi$  est épimorphisme extrémal (il n'est toutefois pas clair que  $\chi$  soit un monomorphisme, ni donc que tout épimorphisme extrémal soit de la forme  $\psi$ ). Tout morphisme  $\phi$  surjectif est un épimorphisme extrémal, car la norme de  $\mathcal{B}$  est alors équivalente à la semi-norme quotient de la norme de  $\mathcal{A}$  en vertu du théorème de l'image ouverte de Banach.

Dans la suite,  $\mathcal{A}$  désigne une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme.

**2.6.2.** Passons à un autre cas, la *localisation uniforme* utilisée en géométrie analytique sur  $\mathcal{K}$ . Si  $f_1, \dots, f_n, f \in \mathcal{A}$  engendrent l'idéal unité, on note  $(fU_i - f_i)_i^-$  l'adhérence

de l'idéal engendré par les  $fU_i - f_i$  et on pose

$$(2.21) \quad \mathcal{A}\left\{\frac{f_1, \dots, f_n}{f}\right\} := \mathcal{A}\langle U_1, \dots, U_n \rangle / (fU_i - f_i)_i^-.$$

C'est la  $\mathcal{A}$ -algèbre de Banach universelle  $\mathcal{B}$  pour laquelle l'image de  $f$  est inversible et les  $f_i/f$  sont contenus dans  $\mathcal{B}^o$ , cf. [6, 6.1.4]<sup>12</sup>. Le morphisme  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\left\{\frac{f_1, \dots, f_n}{f}\right\}$  est un épimorphisme de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach car  $\mathcal{A}\left[\frac{1}{f}\right] \rightarrow \mathcal{A}\left\{\frac{f_1, \dots, f_n}{f}\right\}$  est d'image dense (noter que  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\langle U_1, \dots, U_n \rangle / (fU_i - f_i)_i$  se factorise à travers un isomorphisme  $\mathcal{A}\left[\frac{1}{f}\right] \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}\langle U_1, \dots, U_n \rangle / (fU_i - f_i)_i$  puisque  $f_1, \dots, f_n, f$  engendrent  $\mathcal{A}$ ).

Détaillons le cas fondamental pour la suite où  $i = 1$  et  $f_1 = 1$  :

$$(2.22) \quad \mathcal{A}\left\{\frac{1}{f}\right\} := \mathcal{A}\langle U \rangle / (fU - 1)^-.$$

C'est donc la  $\mathcal{A}$ -algèbre de Banach universelle  $\mathcal{B}$  pour laquelle l'image de  $f$  est inversible d'inverse contenu dans  $\mathcal{B}^o$ . On a  $\mathcal{A}\left\{\frac{1}{f}\right\} = 0$  si  $f \in \mathcal{A}^{oo}$  car  $fU - 1$  est alors inversible.

*Lemme 2.6.1.* — [24, prop. 2.3] Si  $\mathcal{A}$  est uniforme, l'idéal  $(fU - 1)$  de  $\mathcal{A}\langle U \rangle$  est fermé.

L'argument, qui utilise la transformée de Gelfand, est réécrit de manière peut-être plus transparente dans [21, 2.8.8].

Fixons  $\lambda \in \mathcal{K}^o$  tel que  $g := \lambda f$  soit dans  $\mathcal{A}^o$ . Voyons

$$(2.23) \quad \mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\} := \mathcal{A}\left\{\frac{1}{f}\right\}$$

comme  $\mathcal{K}\langle T \rangle$ -algèbre de Banach ( $T \mapsto g$ ), et notons  $\iota_{\lambda/g} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\}$  le morphisme canonique. On a une isométrie (cf. formule (2.2))

$$(2.24) \quad \mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\} \cong \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle} \mathcal{K}\langle T \rangle \left\{\frac{\lambda}{T}\right\},$$

et  $\mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\} = 0$  si  $g \in \lambda \mathcal{A}^{oo}$ . Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

- si  $|\lambda| \leq |\mu|$ , on a un morphisme canonique  $\mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\} \rightarrow \mathcal{A}\left\{\frac{\mu}{g}\right\}$ , et le morphisme canonique  $\mathcal{A}\left\{\frac{\mu}{g}\right\} \rightarrow \mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\}\left\{\frac{\mu}{g}\right\}$  est un isomorphisme.
- si  $|g - h| < |\lambda|$ , on a un isomorphisme canonique  $\mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\} \cong \mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{h}\right\}$  (considérer le développement  $\frac{1}{h} - \frac{1}{g} = \sum_1^\infty \lambda^{-m-1} (g - h)^m \left(\frac{\lambda}{g}\right)^{m+1}$ ).
- $\forall a \in \mathcal{A}$ ,  $|\iota_{\lambda/g}(a)| = \inf_m \left| \left(\frac{g}{\lambda}\right)^m a \right|_{\mathcal{A}}$ .

<sup>12</sup> Cette référence se place dans le contexte où  $\mathcal{A}$  est affinoïde, de sorte que l'idéal  $(fU - f_i)_i$  est fermé. Quitte à substituer  $(fU - f_i)_i^-$ , les arguments de *loc. cit.* valent pour une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach quelconque.

**2.6.3. Exemples.** — (1) Pour l'algèbre spectrale  $\mathcal{A} = \mathcal{K}\langle T \rangle$ , on a  $\mathcal{K}\langle T, \frac{\lambda}{T} \rangle := \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{T}\} = \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{T}\}^u$  : c'est l'algèbre spectrale des fonctions analytiques sur la « couronne fermée » de rayons  $(\lambda, 1)$ , et  $\mathcal{K}\langle T, \frac{\lambda}{T} \rangle^o = \mathcal{K}^o\langle T, \frac{\lambda}{T} \rangle$  est la sous-algèbre des fonctions bornées par 1. La norme n'est multiplicative que si  $\lambda = 0$  ou  $|\lambda| = 1$  (notons qu'en général, si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach multiplicativement normée,  $\mathcal{A}\{\frac{1}{g}\} = \mathcal{A}\{\frac{1}{g}\}^u$  est une sous-algèbre de Banach du complété  $\widehat{\mathcal{Q}(\mathcal{A})}$  du corps de fractions de  $\mathcal{A}$ ).

(2) Les algèbres de Banach  $\mathcal{K}\langle T, \frac{\lambda}{T} \rangle$  et  $\mathcal{K}\langle T, \frac{\lambda^2}{T^2} \rangle$  sont isomorphes mais non isométriques : la première est spectrale, mais pas la seconde (la norme de  $\frac{\lambda}{T}$  est  $|\lambda|^{-1} > 1$ ).

Il peut arriver que  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$  ne soit pas uniforme, cf. [24, §3] (ceci n'arrive pas si  $\mathcal{A}$  est affinoïde réduite munie de sa norme spectrale [6, 7.2.3, prop. 4]). Quoi qu'il en soit,  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^u$  est un épimorphisme dans  $\mathcal{K}\text{-uBan}$ , car l'image de  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$  est dense dans  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^u$ . Le foncteur  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{T.1}\}^u$  est adjoint à gauche de l'inclusion dans  $\mathcal{K}\langle T \rangle\text{-uBan}$  de la sous-catégorie pleine formée dans algèbres  $\mathcal{B}$  telles que  $\frac{T.1}{\lambda}$  soit inversible d'inverse dans  $\mathcal{B}^o$ .

**Lemme 2.6.2.** — On suppose  $g \in \mathcal{A}$  non diviseur de zéro. Soit  $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}'$  un monomorphisme d'algèbres de Banach tel que  $\mathcal{A}'$  soit contenue dans  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$  (en tant que  $\mathcal{A}$ -algèbre). Alors le morphisme induit  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\} \rightarrow \mathcal{A}'\{\frac{\lambda}{g}\}$  est un isomorphisme d'algèbres de Banach.

*Démonstration.* — (d'après O. Gabber). Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , soit  $V_n$  le sous-espace fermé de  $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}$  formé des couples  $(a', a = g^n a')$ . Via la projection selon la première composante, l'espace de Banach  $\hat{\oplus} V_m$  se surjecte sur  $\mathcal{A}'$ . Soit  $W_n$  la projection de  $\hat{\oplus}_{m \leq n} V_m$  dans  $\mathcal{A}'$ . Comme  $\mathcal{A}' = \cup W_n$ , on a  $W_n = \mathcal{A}'$  pour  $n$  assez grand d'après Baire. Par le théorème de l'image ouverte, il existe donc  $n$  tel que  $\hat{\oplus}_{m \leq n} V_m$  se surjecte ouvertement sur  $\mathcal{A}'$ . Ainsi la multiplication par  $g^n$  induit une application continue  $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ , d'où aussi une application continue  $\mathcal{A}'\{\frac{\lambda}{g}\} \rightarrow \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$ . Composant avec la multiplication par  $g^{-n}$  dans  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$ , on obtient un inverse continu du morphisme canonique  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\} \rightarrow \mathcal{A}'\{\frac{\lambda}{g}\}$ .  $\square$

**Lemme 2.6.3.** — On suppose  $\mathcal{A}$  uniforme, et  $g$  non-diviseur de zéro. Alors  $\mathcal{A}^o \rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^o$  est injectif.

*Démonstration.* — En effet, on peut supposer  $||$  spectrale. Pour tout  $a \in \mathcal{A}^o \setminus 0$  et tout  $\lambda \in \mathcal{K}^o \setminus 0$ , on a  $|a|_{\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}} = \inf_m |(\frac{g}{\lambda})^m a|$ . Si  $|\lambda| \leq |ga|$ ,  $\inf_m |(\frac{g}{\lambda})^m a| \geq 1$ , donc l'image de  $a$  dans  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^o$  n'est pas nulle.  $\square$

**2.6.4. Remarques.** — (1)  $\iota_{\lambda/g}$  est injectif si et seulement si  $\inf_m |(\frac{g}{\lambda})^m a|_{\mathcal{A}} = 0 \Rightarrow a = 0$ . C'est le cas si la multiplication par  $g$  dans  $\mathcal{A}$  est isométrique. Les morphismes  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^u \rightarrow \mathcal{A}\{\frac{\mu}{g}\}^u$  sont tous injectifs (comme on le voit en prenant  $\mu = 1$  et en utilisant la densité de  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ ), bien que la multiplication par  $g$  dans  $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^o$  ne soit pas isométrique si  $|\lambda| < 1$ .

(2) Le complété de  $\mathcal{K}^o[\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \frac{\mathbb{T}_2 \mathbb{T}_1^i}{\varpi^i}]_{i \geq 1}$  est la boule unité  $\mathcal{A}^o$  d'une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{A}$  sans  $\mathbb{T}_1$ -torsion, mais on a  $\iota_{\lambda/\mathbb{T}_1}(\mathbb{T}_2) = 0$  si  $|\lambda| > |\varpi|$ , puisque  $\mathbb{T}_2$  est alors infiniment divisible par  $\varpi$  dans  $\mathcal{K}^o[\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \frac{\mathbb{T}_2 \mathbb{T}_1^i}{\varpi^i}, \frac{\lambda}{\mathbb{T}_1}]$ .

## 2.7. Produits (et transformée de Gelfand).

**2.7.1.** Les produits infinis d'algèbres de Banach n'existent pas en général : si  $\mathcal{A}$  n'est pas uniforme et si  $a_n$  est une suite non bornée d'éléments de  $\mathcal{A}^o$ , la donnée des morphismes  $\mathcal{K} \xrightarrow{1 \mapsto a_n} \mathcal{A}$  ne peut équivaloir à celle d'un morphisme de  $\mathcal{K}$  vers une algèbre de Banach.

En revanche, du fait que les morphismes d'algèbres munis d'une norme spectrale vérifient  $\|\phi\| \leq 1$ , la catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes a des produits quelconques (le produit vide étant l'algèbre nulle) :

$$(2.25) \quad \prod^u \mathcal{A}^\alpha := \left\{ (a^\alpha) \in \prod \mathcal{A}^\alpha, |(a^\alpha)| := \sup |a^\alpha|_{sp} < \infty \right\}.$$

On a  $(\prod^u \mathcal{A}^\alpha)^o = \prod \mathcal{A}^{\alpha o}$ .

**2.7.2. Exemple prophylactique.** — On peut se demander si toute  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach spectrale  $\mathcal{A}$  se décompose en produit uniforme  $\mathcal{A} = \prod^u \mathcal{A}^\alpha$  de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach spectrales « connexes »<sup>13</sup>. Il n'en est rien. Soit en effet  $B(\mathcal{A})$  l'algèbre de Boole des idempotents de  $\mathcal{A}$  (ou de  $\mathcal{A}^o$ , c'est la même chose). Une telle décomposition, qui équivaut à  $\mathcal{A}^o = \prod \mathcal{A}^{\alpha o}$ , a lieu si et seulement si  $B(\mathcal{A})$  est complet (toute famille a un supremum) et atomique (tout élément non nul est le supremum d'une famille d'éléments minimaux non nuls).

Inversement, partons d'une algèbre de Boole  $B$  et construisons la  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{A} := (\mathcal{K}\langle \mathbb{T}_b \rangle_{b \in B} / (\mathbb{T}_b \mathbb{T}_{b'} - \mathbb{T}_{b \wedge b'}, \mathbb{T}_b + \mathbb{T}_{-b'} - 1))^u$  topologiquement engendrée par les idempotents  $\mathbb{T}_b$ . On a  $B(\mathcal{A}) \cong B$ . Si  $B$  est par exemple une algèbre de Boole libre infinie - jamais complète ni atomique -,  $\mathcal{A}$  n'admet pas de décomposition en produit uniforme de facteurs connexes. En s'appuyant sur [5, cor. 9.2.7] (voir aussi [23]), on peut d'ailleurs montrer que le spectre de Berkovich  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  s'identifie au spectre maximal de  $B$  (qui lui-même s'identifie à l'espace profini des composantes connexes de  $\text{Spec } \mathcal{A}$ ), et  $\mathcal{A}$  à l'algèbre des fonctions continues bornées à valeurs dans  $\mathcal{K}$  sur cet espace.

**2.7.3.** La transformée de Gelfand d'une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{A}$  est

$$(2.26) \quad \Gamma \mathcal{A} := \prod_{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})}^u \mathcal{H}(x),$$

<sup>13</sup> Une algèbre de Banach uniforme est connexe (i.e. n'a d'autre idempotent que 0 et 1) si et seulement si son spectre de Berkovich  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  est connexe, cf. [5, cor. 7.4.2].

le produit étant pris sur les points du spectre de Berkovich, c'est-à-dire les semi-normes multiplicatives bornées, et  $\mathcal{H}(x)$  désignant le complété du corps résiduel de  $x$ , cf. [5, cor. 1.3.2]. On a un monomorphisme canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \Gamma\mathcal{A}$ , qui est isométrique si et seulement si  $\mathcal{A}$  est spectrale [5, 1.3.2]. Le spectre  $\mathcal{M}(\Gamma\mathcal{A})$  est le compactifié de Stone-Cech de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  discrétisé [5, 1.2.3], et l'application  $\mathcal{M}(\Gamma\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$  est la surjection canonique.

Cette construction définit un endofoncteur  $\Gamma$  de  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  : tout morphisme  $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B}$  induit un homomorphisme « diagonal » continu  $\mathcal{H}(x) \rightarrow \prod_{f_x(y)=x}^u \mathcal{H}(y)$  et on obtient  $\Gamma(f)$  en prenant le produit uniforme lorsque  $x$  parcourt  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ . C'est un foncteur fidèle (puisque  $\mathcal{B} \rightarrow \Gamma\mathcal{B}$  est un monomorphisme), non plein. Un homomorphisme continu  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  d'algèbres de Banach spectrales est isométrique si le morphisme associé  $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$  est surjectif.

## 2.8. Limites.

**2.8.1.** La catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes a des égalisateurs : les sous-algèbres représentant ces égalisateurs au sens usuel sont fermées. Comme elle a des produits, elle est *complète*, i.e. admet toutes les (petites) limites [22, V.2 cor. 2].

Dans le cas d'un système projectif  $(\mathcal{A}^\alpha)$  de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes indexé par un ensemble ordonné  $(\{\alpha\}, \leq)$  (non nécessairement filtrant), la limite s'obtient comme *limite uniforme* définie par

$$(2.27) \quad \text{ulim } \mathcal{A}^\alpha := \{a = (a^\alpha) \in \lim \mathcal{A}^\alpha, |a| := \sup |a^\alpha|_{sp} < \infty\}.$$

C'est bien une algèbre de Banach uniforme (et même spectrale), et on a (compte tenu de ce que  $()^\circ$  est la boule unité pour la norme spectrale)

$$(2.28) \quad (\text{ulim } \mathcal{A}^\alpha)^\circ = \lim \mathcal{A}^{\alpha^\circ}.$$

En particulier, les conditions (1) à (4) du cor. 2.3.2 sont préservées par passage à la limite.

**2.8.2. Exemples.** — (1) Soit  $(r_i)$  une suite de réels positifs tendant vers 1 en croissant. Alors les algèbres de fonctions analytiques en la variable  $T$  sur les « disques fermés » de rayon  $r^i$  forment un système projectif de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes, de limite uniforme  $\mathcal{K}^\circ[[T]] \otimes_{\mathcal{K}^\circ} \mathcal{K}$ , l'algèbre des fonctions analytiques bornées sur le « disque unité ouvert ».

(2) Pour  $|\varpi| < 1$ , les algèbres  $\mathcal{K}\langle T, \frac{\varpi^j}{T} \rangle$  de fonctions analytiques sur les « couronnes fermées » de rayons  $(|\varpi|^j, 1)$  forment un système projectif de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes, de limite uniforme  $\mathcal{K}\langle T \rangle$  : c'est le cas le plus simple du théorème d'extension de Riemann non archimédien (cf. §4).

*Lemme 2.8.1.* — Soit  $(\mathcal{A}^\alpha)$  un système projectif de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes, de limite uniforme  $\mathcal{A}$ . Alors l'homomorphisme canonique  $\mathcal{A}^\circ / \varpi \rightarrow \lim(\mathcal{A}^{\alpha^\circ} / \varpi)$  est injectif.

*Démonstration.* — En effet, comme  $\mathcal{A}^{\alpha o}$  est sans  $\varpi$ -torsion, on a une suite exacte  $0 \rightarrow \lim \mathcal{A}^{\alpha o} \xrightarrow{\varpi} \lim \mathcal{A}^{\alpha o} \rightarrow \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi)$ .  $\square$

**Lemme 2.8.2.** — Soit  $(\mathcal{A}^\alpha)$  un système projectif de  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbres de Banach uniformes. La limite uniforme est canoniquement une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre de Banach uniforme. Notons  $g^{\frac{1}{p^m}}$  l'image de  $T^{\frac{1}{p^m}}$  dans chaque  $\mathcal{A}^\alpha$ . On a un isomorphisme canonique

$$g^{-\frac{1}{p^\infty}} \lim \mathcal{A}^{\alpha o} \cong \lim g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^{\alpha o}.$$

*Démonstration.* — Cela découle, dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^{oo}[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$ , de ce que  $()^a$  et  $()_*$  préservent les limites; alternativement, de l'interversion de limites  $\lim_m \lim_\alpha g^{-\frac{1}{p^m}} \mathcal{A}^{\alpha o} = \lim_\alpha \lim_m g^{-\frac{1}{p^m}} \mathcal{A}^{\alpha o}$ .  $\square$

Ce lemme s'applique notamment au cas du système de localisations  $(\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^u)$  (qui contiennent  $\frac{1}{g}$ ) et montre, compte tenu du lemme 2.5.2, que la limite uniforme  $\tilde{\mathcal{A}}$  vérifie  $\tilde{\mathcal{A}}^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \tilde{\mathcal{A}}^o$ .

## 2.9. Colimites.

**2.9.1.** Soit  $(\mathcal{B}_\alpha)$  un système inductif de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes indexé par un ensemble  $(\{\alpha\}, \leq)$  *filtrant*. On munit  $\text{colim } \mathcal{B}_\alpha$  de la semi-norme (spectrale) limite  $|(b_\alpha)| = \lim_\alpha |b_\alpha|_{sp}$  (bien définie en vertu de la monotonie), et on définit la *colimite uniforme* comme étant le complété séparé  $\text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha$  de cette colimite semi-normée. Munie de la norme induite, c'est une algèbre de Banach uniforme (et même spectrale).

On vérifie immédiatement que la colimite filtrante uniforme est une colimite filtrante dans  $\mathcal{K}\text{-uBan}$ , et on a  $(\text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha)^o = (\widehat{\text{colim } \mathcal{B}_\alpha^o})_*$  (avec la notation du sorite 2.3.1; on a  $\text{colim } \mathcal{B}_\alpha^o |(b_\alpha)| = \lim_\alpha |b_\alpha|_{sp}$ ).

Si les normes sont spectrales et les morphismes  $\mathcal{B}_\beta \rightarrow \mathcal{B}_\alpha$  isométriques, il en est de même de  $\mathcal{B}_\beta \rightarrow \text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha$  (et dans ce cas  $(\text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha)^o = \widehat{\text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha^o}$ ).

**2.9.2.** Comme  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  admet des colimites filtrantes et des sommes amalgamées  $\hat{\otimes}^u$  (donc tous les coégalisateurs puisqu'il y a un objet initial), elle est *cocomplète*, i.e. admet toutes les (petites) colimites (cf. [22, IX th. 1, V th. 2]).

**Lemme 2.9.1.** — Les  $\text{ucolim}$  commutent à la localisation uniforme.

En effet toute  $\text{ucolim}$  commute aux  $\hat{\otimes}^u$ , donc à la localisation uniforme  $(\cdot)\{\frac{1}{g}\}^u$  en vertu de la formule (2.24) (alternativement, cela découle de la propriété d'adjonction à gauche de la localisation uniforme).  $\square$



**2.9.3. Exemples.** — (1) Si  $\mathcal{K}$  est de caractéristique  $p > 0$ , le complété de sa clôture radicielle est  $\text{ucolim } \mathcal{K}^{\frac{1}{p}}$ .

(2) Soient  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach spectrale, et  $g$  un élément de  $\mathcal{A}^0$ . Voyons  $\mathcal{A}$  comme  $\mathcal{K}\langle T \rangle$ -algèbre via  $T \mapsto g$ . Notons que  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^{i+1}}} \rangle$  admet la base orthogonale  $1, T^{\frac{1}{p^{i+1}}}, \dots, T^{\frac{p-1}{p^{i+1}}}$  sur  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle$ . On pose

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^i}} \rangle &:= \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle}^u \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle, \\ \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle &:= \text{ucolim } \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^i}} \rangle = \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle}^u \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle. \end{aligned}$$

Alors d'après la rem. 2.2.7,  $\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^i}} \rangle \rightarrow \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^{i+1}}} \rangle$  est isométrique, et il en est donc de même de  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ . En outre, on a

$$(2.30) \quad \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^i}} \rangle = (\mathcal{A}\langle T^{\frac{1}{p^i}} \rangle / (T - g))^u$$

(cf. formule (2.4), dans laquelle on remplace  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, T$  et  $J$  par  $\mathcal{K}, \mathcal{A}, T^{\frac{1}{p^i}}$  et  $(T - g)$  respectivement).

(3) Toute  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{B}$  est colimite (uniforme) filtrante de  $\mathcal{K}$ -algèbres affinoïdes réduites  $\mathcal{B}_\alpha$ , en telle manière que  $\text{colim } \mathcal{B}_\alpha \rightarrow \mathcal{B}$  est bijectif [21, 2.6.2]. Il suffit, pour tout sous-ensemble fini  $\alpha \subset \mathcal{B}^0$ , de prendre pour  $\mathcal{B}_\alpha$  l'algèbre affinoïde réduite image dans  $\mathcal{B}$  de l'objet libre  $\mathcal{K}\langle T_s \rangle_{s \in \alpha}$  sur  $\alpha$ . L'homomorphisme  $\text{colim } \mathcal{B}_\alpha \rightarrow \mathcal{B}^0$  est clairement surjectif, et il est injectif puisque chaque  $\mathcal{B}_\alpha \rightarrow \mathcal{B}^0$  l'est. D'où le résultat en complétant puis inversant  $\varpi$ <sup>14</sup>.

(4) Les algèbres  $\mathcal{K}\langle \frac{T}{\varpi^i} \rangle$  de fonctions analytiques sur les « disques fermés » de rayon  $|\varpi|^i$  forment un système inductif de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes. La colimite au sens usuel est l'algèbre des germes de fonctions analytiques en l'origine. La semi-norme limite est donnée par  $|\sum a_j T^j| := \lim_i \max_j |a_j \varpi^j| = |a_0|$  (compte tenu de ce que pour  $i \gg 0$ ,  $\max_j$  est atteint pour le premier  $j$  tel que  $a_j \neq 0$ ). La colimite uniforme est donc  $\mathcal{K}$ , les applications  $\mathcal{K}\langle \frac{T}{\varpi^i} \rangle \rightarrow \mathcal{K}$  étant données par l'évaluation en 0.

Ce dernier exemple est un cas particulier du résultat suivant (non utilisé dans la suite de l'article, mais qu'on pourra mettre en regard du th. 4.2.2 - colimite *vs.* limite, voisinages tubulaires de  $f = 0$  *vs.* complémentaires de voisinages tubulaires de  $g = 0$ ).

*Proposition 2.9.2.* — Soient  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme, et  $f \in \mathcal{B}^0$ . On a un isomorphisme canonique

<sup>14</sup> Notons toutefois que les  $\mathcal{K}$ -algèbres affinoïdes réduites sont par définition topologiquement de présentation finie. Mais elles ne sont pas de présentation finie dans  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  au sens catégorique, *i.e.* ne commutent pas aux colimites filtrantes, comme on le voit déjà avec  $\mathcal{K}\langle T \rangle$  : on a  $\text{colim } \text{Hom}(\mathcal{K}\langle T \rangle, \mathcal{B}_\alpha) = \text{colim } \mathcal{B}_\alpha^0, \text{Hom}(\mathcal{K}\langle T \rangle, \text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha) = (\text{colim } \mathcal{B}_\alpha^0)_*$ .

$$(2.31) \quad \text{ucolim } \mathcal{B} \left\{ \frac{f}{\varpi^i} \right\}^u \xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u$$

(où  $()^u$  désigne le complété-séparé pour la semi-norme spectrale associée).

*Démonstration.* — Comme la norme de l'image  $f$  dans  $\mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}^u$  est  $\leq |\varpi|^i$ , l'image de  $f$  dans  $\text{ucolim } \mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}^u$  est nulle. Par ailleurs,  $\mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}/f = \mathcal{B}\langle \mathbf{U} \rangle / (f, \varpi^i \mathbf{U} - f) = \mathcal{B}/f$ . On en déduit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \text{ucolim } \mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}^u & \xrightarrow{\cong} & (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u \end{array}$$

où les deux triangles commutent. Pour conclure, il suffit de voir que les flèches partant de  $\mathcal{B}$  sont des épimorphismes. Or c'est clair pour  $\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u$  (épimorphisme extrémal non nécessairement surjectif) et  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}^u$ , et les colimites préservent les épimorphismes.  $\square$

*Corollaire 2.9.3.* — Soient  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme, et  $g \in \mathcal{A}^0$ . On a des isomorphismes canoniques

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \text{ucolim } \mathcal{A}\langle \mathbf{T}_{\beta^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle \left\{ \frac{\mathbf{T} - g}{\varpi^i} \right\}^u &\xrightarrow{\sim} \mathcal{A}\langle g_{\beta^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle, \\ \left( \widehat{\text{colim}} \mathcal{A}\langle \mathbf{T}_{\beta^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle \left\{ \frac{\mathbf{T} - g}{\varpi^i} \right\}^0 \right)_* &\xrightarrow{\sim} \mathcal{A}\langle g_{\beta^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle^0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — D'après (2.30) et (2.31), on a  $\text{ucolim}_i \mathcal{A}\langle \mathbf{T}_{\beta^i}^{\frac{1}{p}} \rangle \left\{ \frac{\mathbf{T} - g}{\varpi^i} \right\}^u \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}\langle g_{\beta^i}^{\frac{1}{p}} \rangle$ , d'où le résultat en passant à la colimite uniforme sur  $j$  et intervertissant avec la colimite uniforme sur  $i$ .  $\square$

### 3. La catégorie bicomplète des algèbres perfectoides

Il s'agit d'algèbres de Banach uniformes  $\mathcal{A}$  dont l'endomorphisme de Frobenius sur la réduction modulo  $p$  de  $\mathcal{A}^0$  est surjectif. Nous passons en revue les propriétés générales de ces algèbres, notamment le basculement et la préservation par extension finie étale. Nous verrons aussi que les limites et colimites sont représentables, et que le plongement de la catégorie des algèbres perfectoides dans celles des algèbres de Banach uniformes possède un adjoint à droite. Les colimites sont donc les colimites uniformes, mais les limites ne sont pas les limites uniformes en général.

On note  $F$  l'endomorphisme de Frobenius  $x \mapsto x^p$  de tout anneau commutatif de caractéristique  $p > 0$ .

### 3.1. Corps perfectoides.

**3.1.1.** Soit  $\mathcal{K}$  un corps complet pour une valeur absolue *non archimédienne non discrète*, de corps résiduel  $k$  de caractéristique  $p > 0$ . Suivant [30, §3], on dira que  $\mathcal{K}$  est un *corps perfectoïde* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- (i)  $\mathcal{K}^o/p \xrightarrow{F} \mathcal{K}^o/p$  est surjectif,
- (ii)  $\mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{F} \mathcal{K}^o/\varpi$  est surjectif (pour tout  $\varpi \in \mathcal{K}^{oo} \setminus 0$  tel que  $p\mathcal{K}^o \subset \varpi\mathcal{K}^o$ )
- (iii)  $\sigma : \mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{K}^o/\varpi$  est bijectif (pour tout  $\varpi_{\frac{1}{p}}$  de norme  $|\varpi|_{\frac{1}{p}}$ ).

La topologie de  $\mathcal{K}^o$  est alors la topologie  $\varpi$ -adique, le groupe de valuation  $\Gamma$  relatif à  $\varpi$  est  $p$ -divisible (donc dense dans  $\mathbf{R}$ ), et  $k$  est parfait. Si  $\mathcal{K}$  est perfectoïde de caractéristique  $p$ , il est parfait.

**3.1.2. Exemples.** — *Le corps perfectoïde cyclotomique*  $\hat{\mathbf{K}}_{\infty}$  (1) Soit de nouveau  $\mathbf{K}_0$  le corps de fractions de l'anneau de Witt  $W(k)$  d'un corps parfait  $k$ . On fixe une fois pour toutes un système compatible  $(\zeta_{p^i})_{i \in \mathbf{N}}$  de racines primitives  $p^i$ -ièmes de 1 dans une clôture algébrique (d'où un isomorphisme  $\mathbf{Z}_p \cong \lim \mu_{p^i}$ ). Considérons la tour cyclotomique

$$\mathbf{K}_i := \mathbf{K}_0(\zeta_{p^i}) = \mathbf{K}_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^i}).$$

On a  $\mathbf{K}_i^o = W(k)[\zeta_{p^i}]$ , d'uniformisante  $\zeta_{p^i} - 1$ , et  $\mathbf{K}_i^o \equiv (\mathbf{K}_{i+1}^o)^p \pmod{p}$ . Le complété  $\hat{\mathbf{K}}_{\infty}$  de  $\mathbf{K}_{\infty} := \cup \mathbf{K}_i$  est donc un corps perfectoïde. Son groupe de valuation est  $\frac{1}{p-1} \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$ .

(2) Soit  $\pi$  une uniformisante de  $\mathbf{K}_0$ . On a  $\mathbf{K}_0(\pi^{\frac{1}{p^i}})^o = W(k)[\pi^{\frac{1}{p^i}}]$ , et  $\mathbf{K}_0(\pi^{\frac{1}{p^i}})^o \equiv (\mathbf{K}_0(\pi^{\frac{1}{p^{i+1}}})^o)^p \pmod{p}$ . Le complété de  $\mathbf{K}_0(\pi^{\frac{1}{p^{\infty}}})$  est donc un corps perfectoïde.

*Proposition 3.1.1.* — [15, prop. 6.6.6<sup>15</sup>] Soient  $\mathcal{K}$  un corps complet pour une valeur absolue *non archimédienne non discrète* et  $\mathcal{K}^s$  une clôture séparable. Alors  $\mathcal{K}$  est un *corps perfectoïde* si et seulement s'il est *profondément ramifié*, i.e.  $\Omega_{(\mathcal{K}^s)^o/\mathcal{K}^o}$  est annulé par  $\mathcal{K}^{oo}$ .

*Corollaire 3.1.2.* — *La complétion  $\mathcal{L}$  de toute extension algébrique d'un corps perfectoïde  $\mathcal{K}$  est un corps perfectoïde.*  $\square$

### 3.2. Algèbres perfectoides.

**3.2.1.** Suivant [30, §5], on dira qu'une algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{A}$  sur le corps perfectoïde  $\mathcal{K}$  est une  *$\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde* si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

<sup>15</sup> Voir aussi l'article précurseur [13], ainsi que [11] pour les liens avec d'autres notions voisines (extensions arithmétiquement profinies...).

- (i)  $\mathcal{A}^o/p \xrightarrow{F} \mathcal{A}^o/p$  est surjectif,
- (ii)  $\mathcal{A}^o/p \xrightarrow{F} \mathcal{A}^o/p$  est presque surjectif dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ ,
- (iii)  $\mathcal{A}^o/\varpi \xrightarrow{F} \mathcal{A}^o/\varpi$  est surjectif,
- (iv)  $\mathcal{A}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{A}^o/\varpi$  est bijectif (avec  $|\varpi_{\frac{1}{p}}|^p = |\varpi|$ , cf. rem. 2.3.3),
- (v) Frobenius induit un isomorphisme (*resp.* presque-isomorphisme) de  $\mathcal{K}^o$ -algèbres

$$\mathcal{A}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}}, \sigma} \mathcal{K}^o/\varpi = \mathcal{A}^o/\varpi \otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi, F} \mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}^o/\varpi.$$

Les morphismes d'algèbres perfectoides sont les homomorphismes continus d'algèbres, de sorte que la catégorie  $\mathcal{K}\text{-Perf}$  des  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoides est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{K}\text{-uBan}$ . Elle admet un objet initial  $\mathcal{K}$  et un objet final 0.

Si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach fixée, les  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoides  $\mathcal{B}$  munies d'un morphisme  $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$  sont appelées  $\mathcal{A}$ -algèbres perfectoides. Elles forment de manière évidente une catégorie  $\mathcal{A}\text{-Perf}$ .

**3.2.2. Remarques.** — (1) Si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde multiplicativement normée (donc intègre), le complété de son corps de fractions est un corps perfectoïde.

(2) Si  $\text{car } \mathcal{K} = p > 0$ , une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{A}$  est perfectoïde si et seulement si elle est parfaite (*i.e.*  $F$  est bijectif).

Par ailleurs, une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  est uniforme si et seulement si elle est réduite et  $\mathcal{A}^p$  est fermé [18, lem. 3.5]<sup>16</sup>, autrement dit si l'endomorphisme de Frobenius est injectif et d'image fermée. On en déduit qu'une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  est perfectoïde si et seulement si elle est parfaite (l'uniformité est automatique).

**Proposition 3.2.1.** — [30, prop. 5.9][16, §6.3] *Supposons  $\mathcal{K}$  de caractéristique  $p > 0$ . L'inclusion des  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoides dans les  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes admet un adjoint à gauche :  $\mathcal{A} \mapsto \text{ucolim } \mathcal{A}^{\frac{1}{p}} = \text{ucolim}_F \mathcal{A}$ , la complétion de la clôture radicielle. Elle admet aussi un adjoint à droite :  $\mathcal{A} \mapsto \text{ulim}_F \mathcal{A}$ .*

Il résulte du cor. 2.3.2 que le foncteur  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^o$  induit une équivalence de la catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoides vers celle des  $\mathcal{K}^o$ -algèbres  $\mathfrak{A}$  parfaites, plates, complètes, et telles que  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_*$ .

En toute caractéristique, on a (cf. [30, 5.6]) :

**Lemme 3.2.2.** — *Le foncteur  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^o$  induit une équivalence de la catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoides vers celle des  $\mathcal{K}^o$ -algèbres  $\mathfrak{A}$  plates, complètes, telles que  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_*$  et que  $\mathfrak{A}/\varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathfrak{A}/\varpi$  soit bijectif.*

<sup>16</sup> L'hypothèse « réduite », nécessaire, est oubliée dans l'énoncé de *loc. cit.*, mais utilisée dans la preuve sous la forme que  $a \mapsto |a^{p^m}|^{\frac{1}{p^m}}$  est une norme.

*Démonstration.* — Compte tenu du cor. 2.3.2, il reste à vérifier que si  $\mathfrak{A}$  vérifie ces conditions, l'algèbre de Banach  $\mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}]$  est uniforme. Mais cela suit du sorite 2.3.1 (5f).  $\square$

**3.2.3. Exemples.** — (1) L'exemple standard est  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ , le complété de  $\cup \mathcal{K}[T^{\frac{1}{p^j}}]$ . On a  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle = \text{ucolim } \mathcal{K}[T^{\frac{1}{p^j}}]$  et  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o = \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ , le complété  $\varpi$ -adique de  $\cup \mathcal{A}^o[T^{\frac{1}{p^j}}]$ . Plus généralement, si  $\mathcal{A}$  est perfectoïde,  $\mathcal{A}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  l'est aussi. Le couple  $(\mathcal{A}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle, (T^{\frac{1}{p^\infty}}))$  est universel parmi les couples  $(\mathcal{B}, (g^{\frac{1}{p^\infty}}))$  où  $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{A}$ -algèbre perfectoïde et  $(g^{\frac{1}{p^\infty}})$  une suite compatible dans  $\mathcal{B}$  de racines  $p^m$ -ièmes d'un élément  $g \in \mathcal{B}^o$ .

(2) *la  $\hat{\mathbf{K}}_\infty$ -algèbre perfectoïde  $\hat{A}_\infty$*  Reprenons les notations de l'ex. 3.1.2 (1). Soit  $A_i := \mathbf{K}_i^o[[T_1^{\frac{1}{p^j}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^j}}]] \otimes_{\mathbf{K}_i^o} \mathbf{K}_i$  la  $\mathbf{K}_i$ -algèbre de Banach formée des séries à coefficients bornés dans  $\mathbf{K}_i$ , munie de la norme supremum des coefficients (qui est multiplicative et induit la topologie  $\varpi$ -adique). Pour lorsque  $i \in \mathbf{N}$  varie, elles forment un système inductif de  $\mathbf{K}_0$ -algèbres de Banach uniformes dont les morphismes de transition sont isométriques.

On a  $A_0^o = A := W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$  et pour tout  $i$ ,  $A_i^o = \mathbf{K}_i^o[[T_1^{\frac{1}{p^j}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^j}}]]$  est un anneau noethérien régulier local complet de dimension  $n+1$ . L'unique idéal premier de  $A_i^o$  au-dessus de  $p$  est engendré par  $\zeta_{p^j} - 1$ . En outre,  $A_i^o \equiv (A_{i+1}^o)^p \pmod{p}$ .

Le complété  $\hat{A}_\infty := \text{ucolim } A_i$  de  $A_\infty := \cup A_i$  est donc une  $\widehat{\mathbf{K}}_\infty$ -algèbre perfectoïde, dont l'anneau des éléments bornés est contenu dans  $\hat{\mathbf{K}}_\infty^o[[T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^\infty}}]]$  (mais non égale :  $\sum \varpi_{\frac{1}{p^n}} T^n$  n'est pas dans  $\hat{A}_\infty$ ); on a en fait un isomorphisme canonique

$$(3.1) \quad \hat{A}_\infty^o \cong W(k[[T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^\infty}}]]) \hat{\otimes} \hat{\mathbf{K}}_\infty^o.$$

En effet, on a un morphisme canonique  $W(k[[T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^\infty}}]]) \hat{\otimes} \hat{\mathbf{K}}_\infty^o \rightarrow \hat{A}_\infty^o$  entre  $W(k)$ -modules  $p$ -adiquement complets sans torsion, qui est un isomorphisme modulo  $p$ .

### 3.3. Basculément.

**3.3.1.** On suppose  $\text{car } \mathcal{K} = 0$ . L'application multiplicative  $\lim_{x \rightarrow x^p} \mathcal{K}^o \rightarrow \lim_{\mathbf{F}} \mathcal{K}^o / \varpi$  étant bijective, on obtient à la limite une application multiplicative continue  $\# : \lim_{\mathbf{F}} \mathcal{K}^o / \varpi \rightarrow \mathcal{K}^o$ . Il existe  $\varpi^b \in \lim_{\mathbf{F}} \mathcal{K}^o / \varpi$  tel que  $|\#(\varpi^b)| = |\varpi|$ .

On vérifie [30, lem. 3.4] que  $\mathcal{K}^{b^o} := \lim_{\mathbf{F}} \mathcal{K}^o / \varpi$  est l'anneau de valuation du corps perfectoïde de caractéristique  $p$

$$(3.2) \quad \mathcal{K}^b := \left( \lim_{\mathbf{F}} \mathcal{K}^o / \varpi \right) \left[ \frac{1}{\varpi^b} \right], \quad |x^b| := |\#(x^b)|,$$

et que  $\#$  induit un isomorphisme  $\mathcal{K}^{b^o} / \varpi^b \cong \mathcal{K}^o / \varpi$ .

**3.3.2.** Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme. L'application multiplicative  $\lim_{x \rightarrow x^b} \mathcal{A}^o \rightarrow \lim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}^o / \varpi$  est un homéomorphisme [16, th. 6.3.92], ce qui fournit une application multiplicative continue

$$(3.3) \quad \# : \lim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}^o / \varpi \rightarrow \mathcal{A}^o.$$

En outre,  $\lim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}^o / \varpi$  est canoniquement une  $\mathcal{K}^{b_0}$ -algèbre parfaite  $\varpi^b$ -adiquement complète. La norme associée n'est autre que autre que

$$(3.4) \quad |a^b| := |\#(a^b)|.$$

On obtient ainsi une  $\mathcal{K}^b$ -algèbre de Banach perfectoïde (la *basculée* de  $\mathcal{A}$ )

$$(3.5) \quad \mathcal{A}^b := \left( \lim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}^o / \varpi \right) \left[ \frac{1}{\varpi^b} \right]$$

qui vérifie  $\mathcal{A}^{b_0} = \lim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}^o / \varpi$ , et  $\#$  s'étend en une application multiplicative  $\mathcal{A}^b \rightarrow \mathcal{A}$ . Ces constructions sont fonctorielles en  $\mathcal{A}$ ; on obtient ainsi un foncteur

$$(3.6) \quad \flat : \mathcal{K}\text{-uBan} \rightarrow \mathcal{K}^b\text{-Perf}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera aussi  $\flat$  sa restriction à  $\mathcal{K}\text{-Perf}$ .

Par ailleurs, puisque  $\mathcal{A}$  est uniforme, le noyau de  $\mathbb{F}^n$  sur  $\mathcal{A}^o / \varpi$  est  $\varpi^{\frac{1}{p^n}}(\mathcal{A}^o / \varpi)$  (par le point (5f) du sorite 2.3.1 appliqué à la norme spectrale). Donc le noyau de l'homomorphisme  $\lim_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}^o / \varpi) \rightarrow \mathcal{A}^o / \varpi$  induit par  $\#$  est  $\lim_{\mathbb{F}} \varpi^{\frac{1}{p^n}}(\mathcal{A}^o / \varpi) = \varpi^b \lim_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}^o / \varpi)$  (noter que  $\varpi^{\frac{1}{p^n}} a_n$  ne détermine pas  $a_n$ , mais que  $\mathbb{F}$  lève l'ambiguïté). On conclut :

*Proposition 3.3.1.* —  $\mathcal{A}^b$  est perfectoïde, et  $\#$  induit un homomorphisme injectif

$$(3.7) \quad \mathcal{A}^{b_0} / \varpi^b \hookrightarrow \mathcal{A}^o / \varpi.$$

C'est un isomorphisme si et seulement si  $\mathcal{A}$  est perfectoïde.

**3.3.3. Exemples.** — (1)  $\mathcal{K}\langle \mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^b$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{K}^b\langle \mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  (les éléments notés  $\mathbb{T}$  se correspondant par  $\#$ ).

(2) La  $\hat{\mathcal{K}}_\infty^b$ -algèbre perfectoïde  $\hat{\mathcal{A}}_\infty^b$ . Reprenons l'ex. 3.1.2, 3.2.3 (2). Posons  $\varpi^b := (\zeta_{p^i}) - 1$ . Alors  $\hat{\mathcal{K}}_\infty^{b_0}$  s'identifie au complété  $\varpi^b$ -adique de la clôture radicielle de  $k[[\varpi^b]]$ , et  $\hat{\mathcal{A}}_\infty^{b_0}$  au complété  $\varpi^b$ -adique de la clôture radicielle de  $k[[\varpi^b, T_1, \dots, T_n]]$  (comme on le voit en réduisant mod.  $\varpi^b$ ). Les éléments  $T_i$  de  $\hat{\mathcal{A}}_\infty^{b_0}$  et de  $\hat{\mathcal{A}}_\infty^b$  se correspondent par  $\#$ .

**3.3.4. Remarques.** — (1) Si  $\mathcal{A}$  est perfectoïde,  $\#(\mathcal{A}^{b^0})$  engendre un sous- $\mathcal{K}^0$ -module (algèbre) dense de  $\mathcal{A}^0$ . En effet, soit  $\mathfrak{A}$  l'adhérence de ce sous-module. L'image de  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{A}^0/\varpi \cong \mathcal{A}^{b^0}/\varpi^{b^0}$  est  $\mathcal{A}^0/\varpi$ , donc  $\mathfrak{A} = \mathcal{A}^0$  d'après le lemme de Nakayama pour les modules complets.

(2) Si  $\mathcal{A}$  est intègre, il en est de même de  $\mathcal{A}^b$ . En effet, si  $a^b, b^b \in \mathcal{A}^b$  vérifient  $a^b b^b = 0$ , on a  $\#(a^b)\#(b^b) = \#(a^b b^b) = 0$  dans  $\mathcal{A}$ , d'où  $\#(a^b) = 0$  ou  $\#(b^b) = 0$ , et finalement  $a^b = 0$  ou  $b^b = 0$ .

(3) Si la norme de  $\mathcal{A}$  est multiplicative, il en est de même de celle de  $\mathcal{A}^b$ . Et réciproquement si  $\mathcal{A}$  est perfectoïde, comme il suit du point (1) (ou de l'intégrité de  $\mathcal{A}^0/\mathcal{A}^{00} \cong \mathcal{A}^{b^0}/\mathcal{A}^{b^{00}}$ ).

(4) Les éléments idempotents de  $\mathcal{A}$  sont en bijection avec ceux de  $\mathcal{A}^0/\varpi$  et aussi avec ceux de  $\mathcal{A}^b$  (via  $e = e^2 \in \mathcal{A}^0 \mapsto \bar{e} \in \mathcal{A}^0/\varpi \mapsto e^b := (\dots, \bar{e}, \bar{e}) \in \mathcal{A}^{b^0} \mapsto \#e^b = e$ ).

(5) Un morphisme  $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$  d'algèbres perfectoïde est isométrique si et seulement si  $\phi^b$  l'est. En effet, la condition se traduit par l'injectivité de  $\phi^0 \bmod \varpi$ , qui s'identifie à  $\phi^{b^0} \bmod \varpi^{b^0}$ .

**3.3.5.** Plaçons-nous dans le cadre  $(\mathcal{K}^0, \mathcal{K}^{00})$ . Rappelons le premier théorème fondamental de la théorie perfectoïde (cf. [30, th. 5.2, rem. 5.18, th. 3.7]).

*Théorème 3.3.2.*

- (1) Le basculement  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^b$  induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoïdes et  $\mathcal{K}^b$ -algèbres perfectoïdes (indépendante du choix de  $(\varpi, \varpi^b)$ ).
- (2) Le passage à  $(\ )^0$  suivi de la réduction mod.  $\varpi$  (resp.  $\varpi^b$ ) induit une équivalence entre chacune d'elles et la catégorie des  $\mathcal{K}^{0a}/\varpi$ -algèbres plates  $\bar{\mathfrak{A}}$  dont le Frobenius induit un isomorphisme  $\bar{\mathfrak{A}}/\varpi_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^0/\varpi_{\frac{1}{p}, \sigma}} \mathcal{K}^0/\varpi \rightarrow \bar{\mathfrak{A}}$ .

Dans [12, th. 1.2, th. 3.2], J.-M. Fontaine esquisse une démonstration par extension directe de ses constructions bien connues en théorie de Hodge  $p$ -adique :  $\mathcal{K}^0$  est quotient de  $W(\mathcal{K}^{b^0})$ , et si l'on pose

$$(3.8) \quad (\mathcal{A}^b)^{\sharp 0} := W(\mathcal{A}^{b^0}) \otimes_{W(\mathcal{K}^{b^0})} \mathcal{K}^0, \quad (\mathcal{A}^b)^{\sharp} := (\mathcal{A}^b)^{\sharp 0} \left[ \frac{1}{\varpi} \right],$$

on obtient un foncteur  $\sharp : \mathcal{K}^b\text{-Perf} \rightarrow \mathcal{K}\text{-Perf}$  quasi-inverse de  $b$ . En outre

$$(3.9) \quad \mathfrak{A} \mapsto (\lim_{\mathbb{F}} \bar{\mathfrak{A}})^{\sharp 0}, \quad (\text{resp. } \mathfrak{A} \mapsto \lim_{\mathbb{F}} \bar{\mathfrak{A}})$$

est quasi-inverse de la réduction mod.  $\varpi$  (resp.  $\varpi^b$ ). Voir [16, §6.3] pour les détails (ainsi que [21]).

Pour  $\mathcal{A}$  perfectoïde fixée, on déduit de (1) que le basculement induit une équivalence de catégories entre  $\mathcal{A}$ -algèbres perfectoïdes et  $\mathcal{A}^b$ -algèbres perfectoïdes (nous l'utiliserons dans le cas  $\mathcal{A} = \mathcal{K}\langle T_{\rho^{\frac{1}{\infty}}} \rangle$ ).

**3.3.6.** Plus haut, on a associé functoriellement à toute  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}^b$ -algèbre perfectoïde  $\mathcal{A}^b$  et un monomorphisme  $\mathcal{A}^{b^0}/\varpi^b \hookrightarrow \mathcal{A}^0/\varpi$ . Posons

$$(3.10) \quad \natural := \sharp \circ \flat : \mathcal{K}\text{-uBan} \rightarrow \mathcal{K}\text{-Perf}.$$

*Proposition 3.3.3.*

- (1) *Le foncteur  $\natural$  est adjoint à droite de l'inclusion  $\iota$  des  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoïdes dans les  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes. En outre, pour les normes spectrales, la coïunité d'adjonction  $\mathcal{A}^\natural \rightarrow \mathcal{A}$  est isométrique ; c'est un isomorphisme si et seulement si  $\mathcal{A}$  est perfectoïde.*
- (2) *Le foncteur  $\flat$  est adjoint à droite de  $\iota \circ \sharp$ .*

En langage catégorique,  $\mathcal{K}\text{-Perf}$  est une *sous-catégorie coréflexive* (pleine) de  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  [19].

*Démonstration.* — (1) L'adjonction vient de ce que  $\natural \cong id_{\mathcal{K}\text{-Perf}}$ , et l'isométrie de la coïunité d'adjonction de ce que  $\mathcal{A}^{b^0}/\varpi \rightarrow \mathcal{A}^0/\varpi$  est injectif (prop. 3.3.1).

(2) s'en déduit par composition d'adjonctions, puisque  $\flat \cong \flat|_{\mathcal{K}\text{-Perf}} \circ \natural$  et que  $\flat|_{\mathcal{K}\text{-Perf}}$  admet comme adjoint à gauche son quasi-inverse  $\sharp$ .  $\square$

**3.3.7.** Une importante application du basculement concerne les produits tensoriels (cf. [30, prop. 6.18]) :

*Proposition 3.3.4.* — *Soient  $\mathcal{K}$  un corps perfectoïde et  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde. Si  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  sont deux  $\mathcal{A}$ -algèbres perfectoïdes, leur somme amalgamée en tant qu'algèbre perfectoïde existe et coïncide avec la somme amalgamée  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C}$  en tant qu'algèbre de Banach uniforme. L'homomorphisme canonique*

$$(3.11) \quad (\mathcal{B}^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^0} \mathcal{C}^0)_* \rightarrow (\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C})^0$$

*est un isomorphisme. En particulier, si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  sont munies de leur norme spectrale, on a  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C} = \mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C}$ , de boule unité  $(\mathcal{B}^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^0} \mathcal{C}^0)_*$ .*

*Démonstration.* — Il est clair que Frobenius induit une bijection  $(\mathcal{B}^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^0} \mathcal{C}^0)/\varpi^{\frac{1}{p}} \rightarrow (\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^0} \mathcal{C}^0)/\varpi$ . D'après le lemme 3.2.2, il suffit alors de montrer que  $\mathcal{B}^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^0} \mathcal{C}^0$  est presque sans  $\varpi$ -torsion.

Si car  $\mathcal{K} = p$ , cela découle du fait que  $\mathcal{B}^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^0} \mathcal{C}^0$  est parfaite (cf. rem. 3.2.2 (2)).

Si car  $\mathcal{K} = 0$ , il suffit d'après l'équivalence (2) du th. 3.3.2 de voir que  $\mathcal{B}^{0a}/\varpi \otimes_{\mathcal{A}^{0a}/\varpi} \mathcal{C}^{0a}/\varpi$  est plate sur  $\mathcal{K}^{0a}/\varpi$ , ce qui s'obtient par basculement :  $\mathcal{B}^{0a}/\varpi \otimes_{\mathcal{A}^{0a}/\varpi} \mathcal{C}^{0a}/\varpi \cong \mathcal{B}^{b0a}/\varpi^b \otimes_{\mathcal{A}^{b0a}/\varpi^b} \mathcal{C}^{b0a}/\varpi^b$ . Cela montre aussi que les sommes amalgamées commutent au basculement. La troisième assertion résulte de la seconde en vertu du sorite 2.3.1(2 $\ell$ )(5).  $\square$



Il s'ensuit que la catégorie des algèbres perfectoïdes admet des colimites finies, qui se calculent comme dans la catégorie des algèbres de Banach uniformes (ce résultat sera renforcé au §3.9). Elles commutent à l'équivalence de basculement.

On déduit aussi de la proposition que le foncteur  $-\hat{\otimes}_{\mathcal{K}}\mathcal{A}$  est adjoint à gauche du foncteur oubli  $\mathcal{A}\text{-Perf} \rightarrow \mathcal{K}\text{-Perf}$ .

### 3.4. Extensions étales finies d'algèbres perfectoïdes.

**3.4.1.** Soit  $\mathcal{K}$  un corps perfectoïde, et plaçons-nous de nouveau dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ . Rappelons le second théorème fondamental de la théorie perfectoïde (cf. [30, th. 7.9][21]), qui généralise le « théorème de pureté » de Faltings, et que nous généralisons au th. 5.2.1.

*Théorème 3.4.1.* — Soient  $\mathcal{K}$  un corps perfectoïde et  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde.

(1) On a des équivalences de catégories

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{A}^{oa}\text{-algèbres étales finies}\} \\ & \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{A}\text{-algèbres perfectoïdes étales finies}\} \\ & \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{A}\text{-algèbres étales finies}\} \end{aligned}$$

*induites par inversion de  $\varpi$  et oubli de la norme respectivement.*

(2) Ces équivalences sont compatibles au basculement.

En particulier, toute extension étale finie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  est perfectoïde (la norme spectrale de  $\mathcal{B}$  étant l'unique norme spectrale complète, et aussi l'unique norme spectrale compatible avec la topologie canonique du  $\mathcal{A}$ -module projectif fini  $\mathcal{B}$ , cf. 2.2.2), et tout  $\mathcal{K}$ -automorphisme de la  $\mathcal{K}$ -algèbre  $\mathcal{B}$  qui fixe  $\mathcal{A}$  est continu, donc isométrique eu égard aux normes spectrales.

**3.4.2. Exemple prophylactique.** — On ne peut s'affranchir de l'hypothèse « étale » dans le point (1) du théorème, comme le montre l'exemple suivant, où l'on reprend les notations de 3.2.3 (2) avec  $n = 1$ ,  $p = 2$ .

Posons  $g := T + 4$  et considérons la  $\hat{\mathcal{K}}_{\infty}$ -algèbre de Banach (multiplicativement normée)  $\hat{\mathcal{A}}_{\infty}[\sqrt{g}]$ . Elle n'est pas perfectoïde. En effet, tout élément  $a_1 + a_2\sqrt{g}$  de  $\hat{\mathcal{A}}_{\infty}[\sqrt{g}]^o$  vérifie  $2a_1, 2a_2, a_1^2 - a_2^2g \in \hat{\mathcal{A}}_{\infty}^o$  comme on le voit en calculant traces et norme ; en particulier, la dernière condition donne  $a_1(0) \in \mathcal{K}^o$ . L'élément  $f := \frac{i+1}{2}(\sqrt{T+4} - \sqrt{T})$  est dans  $\hat{\mathcal{A}}_{\infty}[\sqrt{g}]^o$  comme on le voit en calculant son carré. Montrons que  $f$  n'a pas de racine carrée modulo 2 : si  $e = a_1 + a_2\sqrt{g} \in \hat{\mathcal{A}}_{\infty}[\sqrt{g}]^o$  vérifie  $e^2 - f \in 2\hat{\mathcal{A}}_{\infty}[\sqrt{g}]^o \subset \hat{\mathcal{A}}_{\infty}^o[\sqrt{g}]$ , on a  $2a_1a_2 - \frac{i+1}{2} \in \hat{\mathcal{A}}_{\infty}^o$ , d'où  $|a_1(0)a_2(0)| = 2^{-\frac{3}{2}}$ , ce qui contredit le fait que  $a_1(0), 2a_2(0) \in \mathcal{K}^o$ .

L'exemple 2.4.2 en car. 2 est du même type.

**3.4.3.** Notons que les foncteurs en jeu sont pleinement fidèles. Commençons par établir la première équivalence du théorème 3.4.1, c'est-à-dire :

*Proposition 3.4.2.*

- (1) Si  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde, toute  $\mathcal{A}^{oa}$ -algèbre étale finie  $\mathfrak{B}$  fournit, après inversion de  $\varpi$ , une  $\mathcal{A}$ -algèbre perfectoïde  $\mathcal{B}$  (de manière fonctorielle si on munit  $\mathcal{B}$  de la norme spectrale), telle que  $\mathcal{B}^{oa} \cong \mathfrak{B}$ .
- (2) Réciproquement, si  $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{A}$ -algèbre perfectoïde étale finie (resp. galoisienne de groupe  $G$ ), alors  $\mathcal{B}^{oa}$  est une  $\mathcal{A}^{oa}$ -algèbre étale finie (resp. galoisienne de groupe  $G$ ).

Un simple argument galoisien remplacera l'usage des anneaux de Robba dans [21].

*Démonstration.* — (1)  $\mathfrak{B}$  est  $\varpi$ -adiquement complète (lemme 1.7.1) et plate sur  $\mathcal{K}^{oa}$ . D'autre part, d'après [15, th. 3.5.13 ii], on a  $(\mathfrak{B}/\varpi) \otimes_{(\mathcal{A}^{oa}/\varpi)} F^*(\mathcal{A}^{oa}/\varpi) \cong F^*(\mathfrak{B}/\varpi)$ . Ainsi  $F$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{B}/\varpi_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p},\sigma}} \mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}/\varpi$  puisqu'il le fait pour  $\mathcal{A}^{oa}/\varpi$ . Donc  $\mathcal{B} := \mathfrak{B}[\frac{1}{\varpi}]$  est perfectoïde et  $\mathcal{B}^{oa} \cong \mathfrak{B}$  (lemme 3.2.2).

(2) (a) Commençons par le cas où l'extension  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  est galoisienne de groupe  $G$ . D'après la prop. 3.3.4, on a  $\mathcal{B}^{oa} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^{oa}} \mathcal{B}^{oa} = (\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B})^{oa} = \prod_G \mathcal{B}^{oa}$ . Ainsi, pour tout  $m$ ,  $\mathcal{B}^{oa}/\varpi^m$  est galoisienne sur  $\mathcal{A}^{oa}/\varpi^m$ , donc étale finie (prop. 1.9.1 (1)), et il en est de même de  $\mathcal{B}^{oa}$  sur  $\mathcal{A}^{oa}$  par 1.8.2.

(b) En général, le rang de  $\mathcal{B}$  sur  $\mathcal{A}$  étant fini continu et borné, on peut supposer, en décomposant  $\mathcal{A}$  en un nombre fini de facteurs, que ce rang est constant, égal à  $r$ . D'après le lemme 1.9.2, on a une extension galoisienne  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$  de groupe  $\mathfrak{S}_r$  se factorisant par  $\mathcal{B}$  et telle que  $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathfrak{S}_{r-1}}$ . D'après le pas (a),  $\mathcal{C}^{oa}$  est une  $\mathcal{A}^{oa}$ -algèbre galoisienne de groupe  $\mathfrak{S}_r$ . On a aussi  $\mathcal{B}^{oa} = (\mathcal{C}^{oa})^{\mathfrak{S}_{r-1}}$  (lemme 2.4.1 (2)), qui est donc étale finie de rang constant sur  $\mathcal{A}^{oa}$ , égal au rang de  $\mathcal{B}$  sur  $\mathcal{A}$  (prop. 1.9.1 (3)).  $\square$

**3.4.4.** Compte tenu de cette proposition, établir la seconde équivalence du théorème 3.4.1 revient à prouver  $(*)_{\mathcal{A}}$  : toute  $\mathcal{A}$ -algèbre  $\mathcal{B}$  étale finie est perfectoïde.

En voici une esquisse de démonstration, suivant l'approche de [21, th. 3.6.21], qui ne fait plus intervenir la presque-algèbre (le lecteur vérifiera que le recours à quelques énoncés ultérieurs ne crée pas de cercle vicieux); dans la prop. 3.4.2 remplace l'usage . En car.  $p$ ,  $(*)_{\mathcal{A}}$  suit de ce qu'une algèbre étale finie sur un anneau parfait est parfaite. Supposons alors car  $\mathcal{K} = 0$ .

- (a) On prouve d'abord  $(*)_{\mathcal{L}}$  pour toute extension finie  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{K}$ , cf. cor. 3.1.2.
- (b) On montre que la transformée de Gelfand  $\Gamma(\mathcal{A})$  est perfectoïde : c'est un produit uniforme de corps perfectoïdes  $\mathcal{H}(x)$ , cf. prop. 3.7.1. On déduit de là et du pas précédent que pour toute  $\mathcal{A}$ -algèbre étale finie  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma(\mathcal{A})$  est perfectoïde et spectrale.

- (c) On a  $\Gamma(\mathcal{A}^b) \cong \Gamma(\mathcal{A})^b$ , cf. prop. 3.7.1. Les corps perfectoïdes  $\mathcal{H}(x)^b$  sont colimites uniformes de localisations rationnelles  $\mathcal{A}_\alpha^b$  de  $\mathcal{A}^b$ , et  $\mathcal{H}(x)$  est colimite uniforme des basculés  $\mathcal{A}_\alpha$  qui sont des localisations rationnelles de  $\mathcal{A}$ , cf. rem. 3.6.4. On a alors un carré essentiellement commutatif d'équivalences

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-colim}(\mathcal{A}_\alpha^b\text{-Alg}^{et,fin}) & \rightarrow & \mathcal{H}(x)^b\text{-Alg}^{et,fin} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2\text{-colim}(\mathcal{A}_\alpha\text{-Alg}^{et,fin}) & \rightarrow & \mathcal{H}(x)\text{-Alg}^{et,fin} \end{array}$$

où les équivalences verticales sont données par  $\sharp$  (compte tenu de  $(*)_{\mathcal{A}^b}$  et  $(*)_{\mathcal{A}_\alpha^b}$ ), et où les équivalences horizontales sont données par l'approximation « à la Elkik » [15, prop. 5.4.53] et [3, exp. 7, lemme 5.6] (voir aussi [30, 7.5]) (colim  $\mathcal{A}_\alpha^o$  est hensélien, de complété  $\mathcal{A}^o$ )<sup>17</sup>.

- (d) Par compacité de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , on obtient un recouvrement fini de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  par des localisations rationnelles  $\mathcal{M}(\mathcal{A}_\alpha)$  tel que  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_\alpha$  soit perfectoïde. Pour passer des  $\mathcal{A}_\alpha$  à  $\mathcal{A}$ , on utilise les bonnes propriétés faisceautiques des algèbres perfectoïdes, cf. [30, th. 7.9][21, th. 3.6.21].

Le point (2) du théorème suit du point (1), des équivalences du th. 3.3.2 et de l'équivalence remarquable de Grothendieck (cf. 1.8.2) :

$$\mathcal{A}^{oa}\text{-Alg}^{et,f} \cong \mathcal{A}^{oa}/\varpi\text{-Alg}^{et,f} \cong \mathcal{A}^{boa}/\varpi^b\text{-Alg}^{et,f} \cong \mathcal{A}^{boa}\text{-Alg}^{et,f}.$$

**3.4.5. Remarques.** — (1) Comme suggéré dans [12], on peut définir une notion d'algèbre perfectoïde sur un corps  $p$ -adique  $\mathcal{K}$  non nécessairement perfectoïde : c'est une  $\mathcal{K}$ -algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{A}$  telle que  $F$  soit surjectif sur  $\mathcal{A}^o/p$  et qu'il existe  $\varpi_{\frac{1}{p}}$  avec  $\varpi_{\frac{1}{p}}^p \equiv p \pmod{p^2\mathcal{A}^o}$ . Cela implique l'existence de  $\varpi_s \in \mathcal{A}$  de norme  $|\varpi_s| \equiv p^{-s} \pmod{p}$  pour tout  $s \in \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$ , avec  $\varpi_{-s} = \varpi_s^{-1}$ , d'où  $\mathcal{A}^{oo} = (\mathcal{A}^{oo})^2$ . On a des analogues du th. 3.3.2 et de la prop. 3.3.4 [21, 3.6.5, 3.6.11]<sup>18</sup>, ainsi que la généralisation correspondante du 3.4.1 [21, 3.6.21, 5.5.9] (presque étale s'entend ici dans le cadre  $(\mathcal{A}^o, \mathcal{A}^{oo})$ ). De nouveau, l'argument galoisien de la prop. 3.4.2 permet de se dispenser des anneaux de Robba de [21]<sup>19</sup>.

(2) Tout anneau local  $(R, \mathfrak{m})$  complet régulier ramifié de caractéristique mixte  $(0, p)$  de corps résiduel parfait  $k$  est isomorphe à un anneau de la forme  $W(k)[[T_{\leq n}]]/(p-f)$  où  $f$  est dans le carré de l'idéal maximal et non divisible par  $p$ . Le même argument que

<sup>17</sup> On utilise ici le fait que pour les algèbres étales finies, objets et morphismes sont de présentation finie. Il n'est pas facile de trouver une exposition des 2-limites et 2-colimites orientée vers les applications plutôt que vers des généralisations ; nous renvoyons à l'appendice A de [34] qui fait exception.

<sup>18</sup> On prendra garde que les "uniform algebras" de [21] sont nos algèbres spectrales.

<sup>19</sup> Ultérieurement, Gabber-Ramero et Bhatt-Morrow-Scholze ont développé une théorie perfectoïde sans corps de base.

pour le cas non ramifié (ex. 3.2.3 (2)) montre que  $W(k)[[\widehat{T}_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]]/(p-f)$  est perfectoïde au sens généralisé ci-dessus, cf. [32, 4.9].

En revanche, en extrayant des racines  $p^{\frac{1}{p^\infty}}$ -èmes d'une suite régulière qui n'engendre pas  $\mathfrak{m}$  (et complétant  $p$ -adiquement), on n'obtient pas nécessairement une algèbre perfectoïde, comme le montre l'exemple de  $R = \mathbf{Z}_2[[T]][\sqrt{T^2+4}]$  et de la suite  $(2, T)$  (cf. ex. 3.4.2).

**3.4.6.** Voici une première conséquence du théorème.

*Corollaire 3.4.3.* — Soit  $\mathcal{B}$  une extension étale finie d'une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde  $\mathcal{A}$ . Alors  $\mathcal{B}^o$  est entier sur  $\mathcal{A}^o$ ; c'est en fait la fermeture (complètement) intégrale de  $\mathcal{A}^o$  dans  $\mathcal{B}$ .

*Démonstration.* — Comme la fonction rang de  $\mathcal{B}$  sur  $\text{Spec}\mathcal{A}$  est continue et bornée, on peut la supposer constante égale à  $r$  en décomposant  $\mathcal{A}$  en produit fini. Soit  $b \in \mathcal{B}^o$  et soit  $\chi_b(T) = \sum_0^r (-1)^i \text{Tr}_{(\wedge^i \mathcal{B})/\mathcal{A}}(\cdot b) T^{r-i}$  son polynôme caractéristique. On a  $\chi_b(b) = 0$ . Par ailleurs, comme  $\mathcal{B}^{oa}$  est presque projectif fini sur  $\mathcal{A}^{oa}$  d'après 3.4.1, on a  $\text{Tr}_{(\wedge^i \mathcal{B})/\mathcal{A}}(\cdot b) = \text{Tr}_{(\wedge^i \mathcal{B}^{oa})/\mathcal{A}^{oa}}(\cdot b) \in \mathcal{A}_*^{oa} = \mathcal{A}^o$ . Donc  $b$  est entier sur  $\mathcal{A}^o$ . La seconde assertion suit de là et du lemme 2.4.1 (1).  $\square$

**3.4.7. Remarque.** — Si  $\mathcal{A}$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, on peut aussi raisonner comme suit : en décomposant  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on se ramène aussitôt au cas où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont connexes. Il existe alors une clôture galoisienne  $\mathcal{C}$  ([33, prop. 5.3.9], de groupe noté  $G$ . Comme  $G$  agit par isométries eu égard aux normes spectrales, le lemme 2.4.1 (2) dit que  $\mathcal{C}^o$  est entier sur  $\mathcal{A}^o$ , donc  $\mathcal{B}^o$  aussi.

**3.4.8.** Le théorème 3.4.1 admet une réciproque partielle, que nous n'utiliserons pas<sup>20</sup> :

*Proposition 3.4.4.* — Soit  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde, extension étale finie d'une sous- $\mathcal{K}$ -algèbre  $\mathcal{A}$ . Alors  $\mathcal{A}$  est perfectoïde.

*Démonstration.* — En raisonnant comme au pas  $b$ ) de la prop. 3.4.2, on se ramène au cas galoisien de groupe  $G$ . Alors  $\mathcal{A} = \mathcal{C}^G$  est perfectoïde d'après la prop. 3.8.1 ci-dessous.  $\square$

<sup>20</sup> voir aussi [21, prop. 3.6.22].

### 3.5. Monomorphismes (et recadrage).

**3.5.1.** Dans  $\mathcal{K}\text{-Perf}$ , les homomorphismes continus injectifs sont des monomorphismes.

La réciproque est vraie en car.  $p$ , car le plongement  $\mathcal{K}\text{-Perf} \rightarrow \mathcal{K}\text{-uBan}$  admet un adjoint à gauche (cela découle aussi formellement du fait que  $\mathcal{K}\text{-Perf}$  admet des *objets libres* :  $S \mapsto \mathcal{K}\langle T_s^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle_{s \in S}$  est adjoint à gauche du foncteur oubli  $\mathcal{K}\text{-Perf} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ).

En car. 0, les monomorphismes sont les morphismes  $\phi$  dont le basculé  $\phi^b$  est injectif. Un tel morphisme n'est pas nécessairement injectif, comme le montre l'exemple suivant. Ainsi, si  $\phi$  est injectif il en est de même de  $\phi^b$ , mais la réciproque n'est pas vraie.

**3.5.2. Exemple prophylactique.** — Soit  $\hat{K}_\infty$  le corps perfectoïde cyclotomique, et considérons la tour d'extensions perfectoïdes  $\hat{K}_\infty[p^{\frac{1}{p^i}}]$  et le complété  $\mathcal{L}$  de leur réunion, qui est encore perfectoïde. Soit  $\hat{K}_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \xrightarrow{\phi} \mathcal{L}$  le morphisme d'évaluation en  $p$  (i.e.  $T^{\frac{1}{p^i}} \mapsto p^{\frac{1}{p^i}}$ ), qui n'est ni injectif ni surjectif.

Basculons :  $\phi^b$  est donné par l'évaluation en un élément  $p^b = (\dots, p^{\frac{1}{p}}, p)$  de  $\mathcal{L}^{b_0}$  ( $\mathcal{L}^b$  est la complétion de la tour d'extensions séparables  $\hat{K}_\infty[p^{\frac{1}{p^i}}]^b$ , et  $p^b$  n'est dans aucune d'entre elles). Le noyau de  $\phi^b$  est un idéal fermé premier radiciel, et l'algèbre de Banach intègre  $\mathcal{B} := \hat{K}_\infty^b\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle / \ker \phi^b$  est perfectoïde spectrale [21, 3.1.6 d]. Ce ne peut être un corps car la norme serait multiplicative [20], et le plongement dans  $\mathcal{L}^b$  serait alors isométrique ; basculant dans l'autre sens, on aurait une factorisation de  $\phi$  en un morphisme surjectif  $\hat{K}_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \rightarrow \mathcal{B}^\sharp$  (cf. rem. 3.6.2 ci-dessous) suivi d'un plongement isométrique dans  $\mathcal{L}$ , ce qui contredirait le fait que  $\phi$  est d'image dense mais non surjectif.

Le morphisme  $\hat{K}_\infty^b\langle T \rangle \rightarrow \hat{K}_\infty^b\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  induit un homéomorphisme  $D_\infty := \mathcal{M}(\hat{K}_\infty^b\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle) \rightarrow D := \mathcal{M}(\hat{K}_\infty^b\langle T \rangle)$ , les corps résiduels  $\mathcal{H}(x)$  de  $D_\infty$  étant les perfection complétées de ceux de  $D$ . Le spectre  $\mathcal{M}(\mathcal{B})$  est un sous-espace connexe (cf. [5, 7.4.2]) de  $D_\infty$  non réduit à un point d'après ce qui précède, donc il contient un point  $x_\infty$  de « dimension »  $d(x) \geq 1$  (cf. [5, 9.2.3]) ; le point  $x \in D$  correspondant est alors de type 2 ou 3 [5, 9.1]. D'après [27, 4.4], il existe  $f \in \mathcal{K}^b\langle T \rangle$  et  $r \in ]0, 1]$  tels que le domaine affinoïde de  $D$  défini par  $|f| \leq r$  ait un bord de Shilov réduit au point  $x$  ; si  $\mathcal{A}$  est l'algèbre affinoïde (non nécessairement stricte) associée, le morphisme  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x)$  est donc isométrique. Il en est alors de même de  $\widehat{\mathcal{A}}^{\frac{1}{p^\infty}} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}(x)}^{\frac{1}{p^\infty}} = \mathcal{H}(x_\infty)$ . Par ailleurs  $\hat{K}_\infty^b\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}^{\frac{1}{p^\infty}}$  est injectif (après extension des scalaires, c'est une localisation « de Weierstrass »), donc le composé  $\hat{K}_\infty^b\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \rightarrow \mathcal{H}(x_\infty)$  aussi. Comme il se factorise à travers  $\mathcal{B}$ , on en déduit que  $\ker \phi^b = 0$ .

**3.5.3.** Reprenons l'exemple du monomorphisme  $\mathcal{B} \hookrightarrow g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^0[\frac{1}{\sigma}]$  de 2.5.2 ( $g$  non diviseur de zéro). Supposons  $\mathcal{B}$  perfectoïde. Nous verrons plus tard (lemme 4.2.3)

que les conditions équivalentes du lemme 2.5.3 sont satisfaites (de sorte que  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}]$  est la fermeture intégrale complète de  $\mathcal{B}^o$  dans  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ ); elle n'est pas nécessairement égale à  $\mathcal{B}$  comme le montre l'exemple  $(\mathcal{K} + T_1^{\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle, g = T_1)$ . La question suivante est ouverte :

*Question 3.5.1.* —  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}]$  est-elle perfectoïde ?

C'est clair en car.  $p$  puisque cette dernière est parfaite. En car. 0, en revanche, même si la multiplication par  $g$  est isométrique, une approche directe à partir des isomorphismes  $g^{-\frac{1}{p^{k+1}}} \mathcal{B}^o/\varpi_1 \xrightarrow{x \mapsto x^p} g^{-\frac{1}{p^k}} \mathcal{B}^o/\varpi$  se heurte à l'éventualité que  $\lim (g^{-\frac{1}{p^k}} \mathcal{B}^o/\varpi) \rightarrow \lim (g^{-\frac{1}{p^k}} \mathcal{B}^o/\varpi_1)$  ne soit pas surjectif<sup>21</sup>. De même, une approche à partir de l'isomorphisme  $\mathcal{B}^o \cong W(\mathcal{B}^{b_0}) \otimes_{W(\mathcal{K}^{b_0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle)} \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  bute sur le problème de la compatibilité de  $g^{-\frac{1}{p^\infty}}(-)$  au produit tensoriel (un quotient, dans ce cas).

**3.5.4.** Pour clarifier la situation, nous introduisons la notion de  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre presque perfectoïde. Plaçons-nous dans le cadre  $(\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle, T^{\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{K}^{oo} \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle)$ , et reprenons les notations de 2.3.6.

*Definition 3.5.2.* — Soit  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre de Banach uniforme. On dit que  $\mathcal{B}$  (ou  $\mathcal{B}^{\hat{a}}$ ) est presque perfectoïde si  $\mathcal{B}^{\hat{a}}$  est isomorphe à une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre perfectoïde.

Notons  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-Perf}$  (resp.  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-pPerf}$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-uBan}$  dont les objets sont perfectoïdes (resp. presque perfectoïdes).

*Lemme 3.5.3.* — L'adjoint à droite  $( )^{\natural}$  du plongement  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle\text{-Perf} \hookrightarrow \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle\text{-uBan}$  induit un adjoint à droite du plongement  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-Perf} \hookrightarrow \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-uBan}$ , encore noté  $\natural$ . Le plongement de  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-Perf} \hookrightarrow \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-pPerf}$  est une équivalence, de quasi-inverse induit par  $\natural$ .

*Démonstration.* — Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle\text{-Perf} & \xrightarrow{i} & \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle\text{-Alg} \\ \downarrow ( )^{\hat{a}} & & \downarrow ( )^{\hat{a}} \\ (\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-Perf}) & \xrightarrow{j} & \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-Alg}. \end{array}$$

<sup>21</sup> J'ignore si cette éventualité se produit.

Alors  $(\hat{\cdot}) \circ \natural \circ (\cdot)_*$  est adjoint à droite de  $(\hat{\cdot}) \circ i \circ (\cdot)_{\natural} = j$ , et  $(\hat{\cdot}) \circ \natural = ((\hat{\cdot}) \circ \natural \circ (\cdot)_*) \circ (\hat{\cdot})$ .  
 La seconde assertion en découle.  $\square$

**Proposition 3.5.4.** — *Soit  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{K}\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle$ -algèbre de Banach uniforme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\mathcal{B}$  est presque perfectoïde,
- (2)  $F$  est presque surjectif sur  $\mathcal{B}^o/\varpi$ ,
- (3)  $\mathcal{B}^{o_0} \hookrightarrow \mathcal{B}^o$  est un presque-isomorphisme,
- (4)  $\mathcal{B}^{\natural} \hookrightarrow \mathcal{B}$  est un presque-isomorphisme,
- (5) il existe une  $\mathcal{K}\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle$ -algèbre perfectoïde  $\mathcal{B}'$  et un morphisme  $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  de  $\mathcal{K}\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle$ -algèbres de Banach qui est un presque-isomorphisme,
- (6)  $(\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_{\natural}$  est perfectoïde.

*Démonstration.* — Les implications (1)  $\Rightarrow$  (2), (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (5) et (6)  $\Rightarrow$  (1) sont claires.

(2)  $\Rightarrow$  (3) : il suffit de prouver que  $\mathcal{B}^{\natural} \rightarrow \mathcal{B}$  est presque surjectif sous (2) (cf. prop. 3.3.3). D'après le lemme de Nakayama (cf. §1.3), il suffit de montrer que  $\mathcal{B}^{o_0}/\varpi \cong \mathcal{B}^{o_0}/\varpi^b \rightarrow \mathcal{B}^o/\varpi$  est presque surjectif. Posons  $\mathcal{L} := \mathcal{B}^o/\varpi$ , de sorte que  $\mathcal{B}^{o_0} = \lim_F \mathcal{L}$ . Il suffit de montrer que  $\lim_F \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  est presque surjectif. Or (2) se réécrit comme la presque surjectivité du morphisme  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}^o\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle/\varpi, F} \mathcal{K}^o\langle T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \rangle/\varpi \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}$  induit par Frobenius. Cette dernière entraîne la surjectivité de  $F : \mathcal{K}^{oo}T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}^{oo}T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \mathcal{L}$ . Par le lemme de Mittag-Leffler pour les  $\mathbf{F}_p$ -espaces vectoriels, on en déduit la surjectivité de  $\mathcal{K}^{oo}T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \lim \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}^{oo}T_{p^\infty}^{\frac{1}{p}} \mathcal{L}$ , d'où la presque surjectivité de  $\lim_F \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ .

(5)  $\Rightarrow$  (1) : d'après le lemme 2.3.5, (5) implique que  $(\mathcal{B}')^o \rightarrow \mathcal{B}^o$  est un presque-isomorphisme, d'où (1).

(3)  $\Rightarrow$  (6) : quitte à remplacer  $\mathcal{B}$  par  $\mathcal{B}^{\natural}$ , (4) permet de supposer  $\mathcal{B}$  perfectoïde pour prouver (6). D'après le lemme précédent, on a  $[((\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_{\natural})^{\natural}]^{\hat{\cdot}} = [((\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_{\natural})^{\hat{\cdot}}]^{\natural} = (\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})^{\natural}$ , et le composé

$$[[((\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_{\natural})^{\natural}]^{\hat{\cdot}}]_{\natural} \rightarrow ((\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_{\natural})^{\natural} \rightarrow (\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_{\natural}$$

est l'identité. Donc le morphisme injectif  $((\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_{\natural})^{\natural} \rightarrow (\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_{\natural}$  est un isomorphisme.  $\square$

**3.5.5. Remarques.** — (1) Supposons  $g$  non-diviseur de zéro. Dans la classe d'isomorphisme de  $\mathcal{B}^{\hat{\cdot}}$ , il y a une algèbre perfectoïde initiale  $(\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_{\natural}$  et une algèbre perfectoïde finale  $(g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}])^{\natural}$  (qui serait  $(\mathcal{B}^{\hat{\cdot}})_*$  si la question ci-dessus avait une réponse positive).

(2) Perfectoïde implique presque perfectoïde mais *pas vice-versa*, même si  $g$  est non-diviseur de zéro : la sous- $\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre  $\mathcal{B} = \mathcal{K} + (T_1^{\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle)^- +$

$(T_2 \mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle)^-$  de  $\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  est presque perfectoïde mais pas perfectoïde, puisque son image modulo  $(T_1^{\frac{1}{p^\infty}})$  n'est pas parfaite.

(3) En dépit du point (5) de la proposition (et du lemme 2.3.5, qui traite des morphismes et non des « presque-morphismes »), il n'est pas clair qu'une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre de Banach uniforme presque isomorphe à une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre perfectoïde soit presque perfectoïde.

**Lemme 3.5.5.** — *Le foncteur  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^o$  induit une équivalence de la catégorie des  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}$ -algèbres presque perfectoïdes vers celle des  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{oa}$ -algèbres  $\mathfrak{A}^a$  plates sur  $\mathcal{K}^o$ , complètes et telles que  $\mathfrak{A}^a / \varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathfrak{A}^a / \varpi$  soit bijectif.*

La preuve est analogue à celle du lemme 3.2.2.

On dira qu'un objet  $\mathcal{B}^{\hat{a}}$  de  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-uBan}$  est *presque étale fini* sur  $\mathcal{A}^{\hat{a}}$  si  $\mathcal{B}^a$  est étale fini sur  $\mathcal{A}^a$ .

**Proposition 3.5.6.** — *Si  $\mathcal{A}$  est presque perfectoïde, on a une équivalence de catégories*

$$\{\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-algèbres presque perfectoïdes presque étales finies}\} \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{A}^{oa}\text{-algèbres étales finies}\}$$

donnée par  $( )^{oa}$ .

La preuve est analogue à celle de la prop. 3.4.2.

### 3.6. Epimorphismes (et localisation).

**3.6.1.** Comme le plongement  $\mathcal{K}\text{-Perf} \rightarrow \mathcal{K}\text{-uBan}$  est fidèle et admet un adjoint à droite, il préserve et reflète les épimorphismes.

Soit  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde et  $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  un épimorphisme extrémal de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes (cf. 2.6.1). Puisque  $\mathcal{K}\text{-Perf}$  est une sous-catégorie co-réflexive de  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  dont les co-unités d'adjonction sont des monomorphismes, elle est stable par quotient extrémal (cf. [19, prop. 4]), donc  $\mathcal{C}$  est perfectoïde (mais vu comme épimorphisme de  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoïdes,  $\phi$  n'est peut-être pas extrémal).

Par exemple, considérons une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde spectrale  $\mathcal{A}$  et un élément  $g \in \mathcal{A}^o$ , et formons l'algèbre spectrale  $\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ , dont  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre normée (ex. 2.9.3 (2)). Alors  $\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  est une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde spectrale (prop. 3.3.4) et le morphisme canonique  $\phi : \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \rightarrow \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  est un épimorphisme extrémal (cf. formules (2.29) et (2.4)), donc  $\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  est perfectoïde. Notant  $g^b \in \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^b$  le système inverse des  $g^{\frac{1}{p^k}}$  modulo  $p$ , on a  $g = \#g^b$ .



**3.6.2. Remarque.** — Signalons quelques résultats relatifs aux épimorphismes que nous n'utiliserons pas dans la suite. Si  $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  un morphisme de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes d'image dense, et si  $\mathcal{B}$  est perfectoïde, il en est de même de  $\mathcal{C}$  (cf. [21, th. 3.6.17 (b)]). De surcroît, si  $\phi$  est surjectif et  $\mathcal{B}$  spectrale, la norme spectrale de  $\mathcal{C}$  est la norme quotient et l'homomorphisme induit sur les boules unité est presque surjectif [21, prop. 3.6.9 (c)].

On en déduit que  $\phi$  est surjectif si et seulement si  $\phi^b$  l'est ; en effet, la condition se traduit par la presque surjectivité de  $\phi^o$  mod.  $\varpi$ , qui s'identifie à  $\phi^{b^o}$  mod.  $\varpi^b$ .

Par ailleurs, noter que  $\ker \phi^b$  est un idéal fermé radiciel, donc le quotient  $\mathcal{B}^b / \ker \phi^b$  est perfectoïde [21, 3.1.6 d)], et on a une factorisation canonique de  $\phi$  dans  $\mathcal{K}\text{-Perf}$  en

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{B}^b / \ker \phi^b)^\# \xrightarrow{\phi_2} (\mathcal{B} / \ker \phi)^u \xrightarrow{\phi_3} \mathcal{C}$$

où  $\phi_1$  est surjectif,  $\phi_2$  est à la fois un épimorphisme extrémal de  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes et un monomorphisme, et  $\phi_3 \circ \phi_2$  est un monomorphisme.

**3.6.3.** Passons aux localisations affinoïdes (cf. §2.6.2), et commençons par examiner l'exemple standard de l'algèbre perfectoïde spectrale  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ . Si  $\text{car } \mathcal{K} = 0$ , on prend  $\varpi$  de la forme  $\#(\varpi^b)$ , et on pose  $\varpi^{\frac{1}{p^j}} := \#((\varpi^b)^{\frac{1}{p^j}})$ ; notons que le basculé de  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  est  $\mathcal{K}^b\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ .

Pour tout  $j$  et tout  $m$ ,  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^m}} \rangle \left\{ \frac{\varpi^j}{T} \right\}^o$  est le complété  $\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^m}}, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^m}} \rangle$  de  $\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^m}}, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^m}}] := \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^m}}, U^{\frac{1}{p^m}}] / (T^{\frac{1}{p^k}} U^{\frac{1}{p^k}} - \varpi^{\frac{j}{p^k}})_{k \leq m}$  tandis que  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^m}} \rangle \left\{ \frac{\varpi^j}{T} \right\}_{\leq 1}$  est le complété  $\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^m}}, \frac{\varpi^j}{T} \rangle$  de  $\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^m}}, \frac{\varpi^j}{T}] := \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^m}}, U] / (TU - \varpi^j)$ . Passant à la colimite complétée (pour  $m \rightarrow \infty$ ), on obtient

$$(3.12) \quad \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{\varpi^j}{T} \right\}^o = \mathcal{K}^o\left\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, \left( \frac{\varpi^j}{T} \right)^{\frac{1}{p^\infty}} \right\rangle := \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}, U^{\frac{1}{p^\infty}}] / \widehat{(T^{\frac{1}{p^k}} U^{\frac{1}{p^k}} - \varpi^{\frac{j}{p^k}})_k},$$

alors que la boule unité est

$$(3.13) \quad \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{\varpi^j}{T} \right\}_{\leq 1} = \mathcal{K}^o\left\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, \frac{\varpi^j}{T} \right\rangle = \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \hat{\otimes}_{\mathcal{K}^o\langle T \rangle} \mathcal{K}^o\left\langle T, \frac{\varpi^j}{T} \right\rangle.$$

Ainsi

$$(3.14) \quad \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{\varpi^j}{T} \right\} = \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle} \mathcal{K}\left\langle T, \frac{\varpi^j}{T} \right\rangle = \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle} \mathcal{K}\langle T \rangle \left\{ \frac{\varpi^j}{T} \right\}$$

est perfectoïde au vu de (3.12), donc uniforme, mais non spectrale en général d'après (3.13). Pour toute  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre de Banach uniforme  $\mathcal{A}$ , on a alors, en notant  $g$  l'image de  $T$  et en combinant les formules (2.24) et (3.14) :

$$(3.15) \quad \mathcal{A}\left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\} \cong \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle} \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{\varpi^j}{T} \right\}.$$

**Proposition 3.6.1.** — Soient  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre perfectoïde munie de sa norme spectrale, et  $g = T \cdot 1$ . Alors pour tout  $j \in \mathbf{N}$ ,  $\mathcal{A}\left\{\frac{\varpi^j}{T}\right\}$  est perfectoïde et le morphisme canonique

$$(3.16) \quad \left( \mathcal{A}^o \hat{\otimes}_{\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle} \mathcal{K}^o\left\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, \left(\frac{\varpi^j}{T}\right)^{\frac{1}{p^\infty}} \right\rangle \right)_* \rightarrow \mathcal{A}\left\{\frac{\varpi^j}{g}\right\}^o$$

est un isomorphisme. En particulier,  $\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle} \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\}^u$  est spectrale.

En outre, si  $\text{car } \mathcal{K} = 0$ ,  $\mathcal{A}\left\{\frac{\varpi^j}{g}\right\}^b$  s'identifie à  $\mathcal{A}^b\left\{\frac{(\varpi^b)^j}{g^b}\right\}$  où  $g^b$  est l'image de  $T$  dans  $\mathcal{A}^b$  (de sorte que  $\#g^b = g$ ).

*Démonstration.* — Compte tenu des formules (3.12)(3.15), cela suit de la prop. 3.3.4.  $\square$

**3.6.4. Remarque.** — Le même argument montre que  $\mathcal{A}\left\{\frac{f_1, \dots, f_n}{g}\right\}$  est perfectoïde si  $f_1, \dots, f_n, g$  admettent des suites compatibles de racines  $p^m$ -ièmes. C'est encore vrai sans supposer cette condition : Scholze le déduit du résultat précédent (qu'il prouve à nouveaux frais [30, def. 2.13, th. 6.3 (ii), lem. 6.4 (iii)] plutôt que de le déduire du résultat sur les  $\hat{\otimes}$ ) grâce à un lemme d'approximation de  $f_i, g \in \mathcal{A}^o$  par des éléments du type  $\# \tilde{f}_i^{\tilde{p}}, \# \tilde{g}^{\tilde{p}}$  [30, cor. 6.7 (i)].

### 3.7. Produits (et transformée de Gelfand).

**3.7.1.** Les produits uniformes d'algèbres perfectoïdes sont perfectoïdes, du fait que  $(\prod \mathcal{A}^{\alpha_o})/\varpi \cong \prod (\mathcal{A}^{\alpha_o}/\varpi)$ .

**Proposition 3.7.1.** — Si  $\mathcal{A}$  est perfectoïde, il en est de même de sa transformée de Gelfand  $\Gamma(\mathcal{A})$ . En outre  $\Gamma(\mathcal{A}^b) \cong \Gamma(\mathcal{A})^b$ .

*Démonstration.* — Comme  $\Gamma(\mathcal{A})$  est produit uniforme de corps  $\mathcal{H}(x)$ , il suffit de voir que ceux-ci sont perfectoïdes. Or  $\mathcal{H}(x)$  est colimite uniforme de localisations rationnelles de  $\mathcal{A}$ , qui sont perfectoïdes, cf. rem. 3.6.4 et [21, 2.4.17]; donc  $\mathcal{H}(x)$  est perfectoïde (cf. §3.9). La seconde assertion vient de la commutation des localisations rationnelles au basculement et de ce que  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{M}(\mathcal{A}^b)$  [21, th. 3.3.7] ( $\Gamma(\mathcal{A})^b$  peut être beaucoup plus grand que  $\Gamma(\mathcal{A}^b)$  si  $\mathcal{A}$  n'est pas perfectoïde, par exemple pour  $\mathcal{A} = \mathcal{K}\langle T \rangle$ ).  $\square$

### 3.8. Limites.

**3.8.1.** La catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoïdes est *complète*, i.e. admet toutes les (petites) limites. Cela découle de ce que  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  est complète et  $\mathcal{K}\text{-Perf}$  en est une sous-catégorie coréflexive, i.e. le plongement  $\mathcal{K}\text{-Perf} \hookrightarrow \mathcal{K}\text{-uBan}$  admet un adjoint à droite (cf. prop. 3.2.1, 3.3.3).

Si  $\text{car } \mathcal{K} = p$ , ce plongement admet aussi un adjoint à gauche (cf. prop. 3.3.1), donc reflète les limites : les limites perfectoïdes sont les ulim. Comme  $b : \mathcal{K}\text{-uBan} \rightarrow \mathcal{K}^b\text{-Perf}$  admet un adjoint à gauche (prop. 3.3.3), il commute donc aux ulim.

Si  $\text{car } \mathcal{K} = 0$ , on les obtient par basculement à partir du cas de caractéristique  $p$  : les limites perfectoïdes sont les ulim<sup>‡</sup>.

**3.8.2.** En caractéristique 0, *limite perfectoïde et limite uniforme ne coïncident pas.*

Ce phénomène se présente déjà dans le cas des limites finies : *l'intersection de deux sous-algèbres perfectoïdes d'une algèbre perfectoïde n'est pas nécessairement perfectoïde*, comme on le voit dans l'ex. 3.4.2, où  $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}] = \widehat{Q(A_\infty)}(\sqrt{g}) \cap \hat{A}_\infty(g^{\frac{1}{2^\infty}}) \subset \widehat{Q(A_\infty)}(g^{\frac{1}{2^\infty}})$  (cf. 3.6.1, rem. 3.2.2 (1) et 4.2.7).

Dans la direction positive, on a :

*Proposition 3.8.1.* — *L'anneau des invariants  $\mathcal{B}^G$  d'une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde  $\mathcal{B}$  sous un groupe fini d'isométries est une  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde, et identifiant  $G$  à un groupe d'isométries de  $\mathcal{B}^b$  par basculement, on a  $\mathcal{B}^{bG} = \mathcal{B}^{Gb}$ .*

*Démonstration.* — D'après la discussion qui précède, il suffit de montrer la première assertion. Notons  $(\mathcal{B}^{bG})^\ddagger$  la  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde associée à  $\mathcal{B}^{bG}$  par basculement. On a  $\mathcal{B} \cong W(\mathcal{B}^{b0})[\frac{1}{p}] \otimes_{W(\mathcal{K}^{b0})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K}$ , d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^G &\cong \left( W(\mathcal{B}^{b0}) \left[ \frac{1}{p} \right] \otimes_{W(\mathcal{K}^{b0})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K} \right)^G = \left( W(\mathcal{B}^{b0}) \left[ \frac{1}{p} \right] \right)^G \otimes_{W(\mathcal{K}^{b0})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K} \\ &= \left( W(\mathcal{B}^{b0})^G \left[ \frac{1}{p} \right] \right) \otimes_{W(\mathcal{K}^{b0})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K} = W(\mathcal{B}^{b0G}) \left[ \frac{1}{p} \right] \otimes_{W(\mathcal{K}^{b0})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K} \\ &\cong (\mathcal{B}^{bG})^\ddagger, \end{aligned}$$

la première égalité s'obtenant en identifiant  $G$ -invariants et image du projecteur de Reynolds  $b \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in G} \gamma(b)$ . □

**3.8.3. Remarque.** — Ceci ne s'étend pas aux groupes infinis. Reprenons l'exemple 3.2.3 (2) avec  $n = 1$  : l'action galoisienne de  $\mathbf{Z}_p$  sur  $T_1^{\frac{1}{p^\infty}} \subset A_\infty$  s'étend par continuité à l'algèbre perfectoïde  $\hat{A}_\infty$ , mais l'algèbre  $A_0$  de ses invariants n'est pas perfectoïde.

**3.8.4.** Supposons  $\text{car } \mathcal{K} = 0$ , notons encore  $\mathcal{K}^b$  son basculé, et prenons  $\varpi$  de la forme  $\#(\varpi^b)$ . On a vu que la limite perfectoïde d'un système projectif  $(\mathcal{A}^{\alpha b})$  de  $\mathcal{K}^b$ -algèbres perfectoïdes coïncide avec  $\mathcal{A}^b := \text{ulim } \mathcal{A}^{\alpha b}$ .

Dans le cas d'un système projectif  $(\mathcal{A}^\alpha)$  de  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoides, de limite uniforme  $\mathcal{A}$ , la limite perfectoïde n'est autre, on l'a vu, que l'algèbre  $\mathcal{A}^\natural$ , dont le basculé est déterminé par

$$(3.17) \quad (\mathcal{A}^\natural)^{b_0} = \mathcal{A}^{b_0} = \lim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}^o = \lim_{\mathbb{F}, \alpha} \mathcal{A}^{\alpha o} = \lim_{\alpha} \mathcal{A}^{\alpha b_0} = \lim_{\mathbb{F}, \alpha} (\mathcal{A}^{\alpha o} / \varpi).$$

L'exemple suivant montre que  $\mathcal{A}^\natural \rightarrow \mathcal{A}$  n'est pas un isomorphisme en général.

**3.8.5. Exemple prophylactique.** — Reprenons l'ex. 3.4.2. Nous verrons au th. 4.2.2 que la limite uniforme des  $\hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{2^\infty}} \rangle \langle \frac{\varpi^j}{g} \rangle$  est  $g^{-\frac{1}{2^\infty}} \hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{2^\infty}} \rangle$  qui n'est autre que la fermeture complètement intégrale de  $\hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{2^\infty}} \rangle$  dans  $\hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{2^\infty}} \rangle [\frac{1}{g}]$ . Passant aux  $2\mathbf{Z}_2$ -invariants, la limite uniforme  $\mathcal{B}$  des  $\hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{2^\infty}} \rangle \langle \frac{\varpi^j}{g} \rangle^{2\mathbf{Z}_2}$  n'est autre que la fermeture complètement intégrale de  $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}] = \hat{A}_\infty \langle g^{\frac{1}{2^\infty}} \rangle^{2\mathbf{Z}_2}$  dans  $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}, \frac{1}{g}]$  (cf. rem. 4.2.5 et 4.2.7). Or  $\hat{A}_\infty$  est complètement intégralement clos (ex. 4.2.6), et comme la fermeture intégrale d'un anneau complètement intégralement clos dans toute extension algébrique de son corps de fractions est complètement intégralement close ([8, ch. V, §1, ex. 14]), on a  $\mathcal{B} = \hat{A}_\infty[\sqrt{g}]$ , qui n'est pas perfectoïde.

### 3.9. Colimites.

**3.9.1.** La catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoides admet des colimites filtrantes : ce sont les colimites uniformes. En effet, si l'endomorphisme de Frobenius est surjectif sur les  $\mathcal{B}_\alpha^o / \varpi$ , il l'est sur

$$(3.18) \quad \operatorname{colim} (\mathcal{B}_\alpha^{oa} / \varpi) \cong (\operatorname{colim} \mathcal{B}_\alpha^{oa}) / \varpi \cong (\operatorname{ucolim} \mathcal{B}_\alpha)^{oa} / \varpi.$$

Comme elle admet aussi des sommes amalgamées  $\hat{\otimes}^u = \hat{\otimes}$ , elle est *cocomplète*, les colimites se calculant comme dans la catégorie des  $\mathcal{K}$ -algèbres de Banach uniformes. Les colimites d'algèbres perfectoides commutent à l'équivalence de basculement.

**3.9.2. Exemples.** — (1) Le complété d'une extension algébrique de  $\mathcal{K}$  s'écrit  $\hat{\mathcal{K}}_\infty = \operatorname{ucolim}_i \mathcal{K}_i$  où  $\mathcal{K}_i$  parcourt les extensions finies séparables de  $\mathcal{K}$ , qui sont des corps perfectoides d'après le cor. 3.1.2 ou le th. 3.4.1 ; donc  $\hat{\mathcal{K}}_\infty$  est un corps perfectoïde.

(2) Le coproduit d'une famille  $(\mathcal{B}_\alpha)$  de  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoides est représenté par un produit tensoriel complété (éventuellement infini)  $\hat{\otimes}_{\mathcal{K}} \mathcal{B}_\alpha = \hat{\otimes}_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ . Pour toute  $\mathcal{K}$ -algèbre perfectoïde, le morphisme  $\hat{\otimes}_{\alpha \in \mathcal{B}^{b_0}} \mathcal{K} \langle T_\alpha^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $T_\alpha \mapsto \#\alpha$ , a une image dense (cf. rem. 3.3.4 (1)).

#### 4. Analyse perfectoïde autour du « théorème d'extension de Riemann »

D'après le théorème d'extension de Riemann, les fonctions analytiques bornées sur un polydisque complexe privé d'un sous-espace analytique - une hypersurface d'équation  $g = 0$  pour fixer les idées - se prolongent en des fonctions analytiques sur tout le polydisque. L'analogie  $p$ -adique de ce résultat est connu [4] ; avec les notations de l'ex. 3.2.3 (2), on a

$$(4.1) \quad A = \lim A_0 \left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\}^o$$

pour tout élément  $g \in A \setminus 0$ . Ce sont des versions perfectoïdes de cet énoncé que nous visons dans ce paragraphe.

**4.1. Entrée en matière.** — Donnons une courte preuve de l'énoncé plus faible

$$(4.2) \quad A = \lim A_0 \left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\}_{\leq 1}$$

( $A = \mathcal{K}_0^o[[T_{\leq n}]]$ ,  $A_0 := A[\frac{1}{p}]$ ). On peut supposer  $g$  non constant et même, quitte à faire un changement de variables  $T_1, \dots, T_n$ , sous forme de Weierstrass en la variable  $T_n$ , i.e.  $g \in A \setminus (p, T_1, \dots, T_{n-1})A$  ([8, VII, §3, n. 7, lemme 3]). Le théorème de préparation de Weierstrass [8, VII, §3, n. 8, prop. 5] énonce que  $A/gA \cong \bigoplus_{s=0}^{r-1} \mathcal{K}_0^o[[T_{<n}]]T_n^s$  (où  $r$  est la valuation  $T_n$ -adique de  $g$  modulo  $(p, T_{<n})$ ), d'où, d'après Nakayama,

$$A = \bigoplus \mathcal{K}_0^o[[T_{<n}, g]]T_n^s.$$

Appliquant  $\otimes_{\mathcal{K}(g)_{\leq 1}} \mathcal{K}(g, \frac{p^j}{g})_{\leq 1}$  et quotientant par la torsion  $p$ -primaire éventuelle, on en déduit (en vertu de la formule (2.24) et du point 2e) du sorite 2.3.1) une décomposition

$$A_0 \left\{ \frac{p^j}{g} \right\}_{\leq 1} \cong \bigoplus \mathcal{K}_0^o[[T_{<n}, g]] \left[ \frac{1}{p} \right]_{\leq 1} \left\{ \frac{p^j}{g} \right\} T_n^s,$$

compatible avec les flèches de transition quand  $j$  augmente. On est donc ramené à démontrer l'énoncé initial dans le cas particulier  $g = T_n$ , qui se traite directement en observant que  $A_0 \left\{ \frac{p^j}{T_n} \right\}_{\leq 1} = A \left\langle \frac{p^j}{T_n} \right\rangle$  et en considérant le développement en puissances de  $T_n$  à coefficients dans  $\mathcal{K}_0^o[[T_{<n}]]$ .

On peut ensuite remplacer  $A_0$  par  $A_i$  ; mais passer à la colimite uniforme pour en déduire l'énoncé analogue pour l'algèbre perfectoïde  $\hat{A}_\infty$  ne va pas de soi ; nous y reviendrons dans l'ex. 4.2.6, où nous montrerons aussi l'égalité  $A = \lim A_0 \left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\}^o$ .

**4.2. Limite uniforme de localisées d'une algèbre perfectoïde.** — On compare ici une algèbre perfectoïde  $\mathcal{A}$  à la limite uniforme de ses localisées  $\mathcal{A} \left\langle \frac{\varpi^j}{g} \right\rangle$ .

**4.2.1.** Soient  $\mathcal{K}$  un corps perfectoïde de caractéristique résiduelle  $p$ , et  $\varpi$  un élément de  $\mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus 0$  tel que  $p\mathcal{K}^{\circ} \subset \varpi\mathcal{K}^{\circ}$ . Si  $\text{car } \mathcal{K} = 0$ , on prend  $\varpi$  de la forme  $\#(\varpi^b)$ , et on spécifie pour chaque  $i$  une racine  $p^i$ -ème de  $\varpi$  en posant  $\varpi^{\frac{1}{p^i}} := \#((\varpi^b)^{\frac{1}{p^i}})$ .

Etant donné, pour  $r \in \mathbf{N}[\frac{1}{p}]$ , une  $(\mathcal{K}^{\circ}/\varpi^r)[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^{\infty}}}]$ -algèbre  $\mathbf{R}$ , considérons les  $(\mathcal{K}^{\circ}/\varpi^r)[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^{\infty}}}]$ -algèbres

$$(4.3) \quad \mathbf{R}^{[j]} := \mathbf{R} \otimes_{\mathcal{K}^{\circ}[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^{\infty}}}]_1} \mathcal{K}^{\circ} \left[ \mathbb{T}^{\frac{1}{p^{\infty}}}, \left( \frac{\varpi^j}{\mathbf{T}} \right)^{\frac{1}{p^{\infty}}} \right], \quad (j \in \mathbf{N}).$$

Elles forment un système projectif, l'élément  $u_{[j+1]}^s := 1 \otimes (\frac{\varpi^{j+1}}{\mathbf{T}})^s$  de  $\mathbf{R}^{[j+1]}$  s'envoyant sur  $\varpi^s u_{[j]}^s \in \mathbf{R}^{[j]}$ . On a  $\mathbb{T}^s u_{[j]}^s = \varpi^{js} \cdot 1_{\mathbf{R}^{[j]}}$ .

La proposition suivante est une version simplifiée d'un résultat remarquable de P. Scholze [31, prop. II.3.1].

*Proposition 4.2.1.* — *Le morphisme canonique  $\mathbf{R} \rightarrow \lim_j(\mathbf{R}^{[j]})$  est un presque-isomorphisme dans le cadre  $(\mathcal{K}^{\circ}[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^{\infty}}}], (\varpi\mathbf{T})^{\frac{1}{p^{\infty}}} \mathcal{K}^{\circ}[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^{\infty}}}]$ ).*

Nous utiliserons librement le fait qu'une  $\lim$  ou  $\lim^1$  indexée par un ensemble ordonné peut se calculer sur un sous-ensemble cofinal.

*Démonstration.* — Introduisons les sous- $\mathbf{R}$ -modules

$$(4.4) \quad \mathbf{R}^{[j]k} := \sum_{s \in \mathbf{N}[\frac{1}{p}] \cap [0, \frac{1}{p^k}]} \mathbf{R} \cdot u_{[j]}^s \subset \mathbf{R}^{[j]},$$

qui forment un double système projectif de  $\mathbf{R}$ -modules.

Comme  $u_{[j]}^s$  s'envoie sur 0 dans  $\mathbf{R}^{[j]}$  si  $s(j' - j) \geq r$ ,  $\mathbf{R}^{[j']k} \rightarrow \mathbf{R}^{[j]k}$  se factorise à travers  $\mathbf{R}^{[j]k}$  dès que  $j' \geq j + rp^k$ . On en déduit

$$(4.5) \quad \lim_j \mathbf{R}^{[j]k} \cong \lim_j \mathbf{R}^{[j]k} \cong \lim_{jk} \mathbf{R}^{[j]k}.$$

Comme  $\mathbb{T}^{\frac{1}{p^k}} u_{[j]}^s \in S^j := \text{Im}(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{[j]})$  si  $s \leq \frac{1}{p^k}$ , on a  $\mathbb{T}^{\frac{1}{p^k}} \mathbf{R}^{[j]k} \subset S^j$ , et le quotient est annulé par  $\mathbb{T}^{\frac{1}{p^k}}$ . On en déduit (cf. 1.3)

$$(4.6) \quad (S^j)^a \cong \lim_k (\mathbf{R}^{[j]k})^a.$$

Par ailleurs, le noyau de  $\mathbf{R} \twoheadrightarrow S^j \cong \text{Im}(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}[\mathbb{U}_{[j]}^{\frac{1}{p^{\infty}}}] / (\mathbb{T}^{\frac{1}{p^k}} \mathbb{U}_{[j]}^{\frac{1}{p^k}} - \varpi^{\frac{1}{p^k}})_{k \in \mathbf{N}})$  est annulé par  $\mathbb{T}^{\frac{1}{p^k}}$  pour tout  $j$  de la forme  $p^\ell$  : en effet, si  $a$  est dans ce noyau, et si on le voit comme élément de  $\mathbf{R}[\mathbb{U}_{[j]}^{\frac{1}{p^{\infty}}}]$ , il s'écrit  $(\mathbb{T}^{\frac{1}{p^k}} \mathbb{U}_{[j]}^{\frac{1}{p^k}} - \varpi^{\frac{1}{p^k}}) \sum a_s \mathbb{U}_{[j]}^s$  pour  $k$  convenable (qu'on

peut supposer  $\geq \ell$  puisque  $T^{\frac{1}{p^k}}U_{[j]}^{\frac{1}{p^k}} - \varpi^{\frac{1}{p^k}}$  divise  $T^{\frac{1}{p^k}}U_{[j]}^{\frac{1}{p^k}} - \varpi^{\frac{1}{p^\ell}}$  si  $k \geq \ell$ ). En comparant les coefficients, on obtient alors  $T^{\frac{n}{p^k}}a = -\varpi^{\frac{j(n+1)}{p^k}}a\frac{n}{p^k}$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , d'où le résultat en prenant  $n = \ell p^{k-\ell}$ . Compte tenu de (4.5)(4.6), on conclut que  $R^a \cong \lim_j (S^j)^a \cong \lim_{jk} (R^{[j]k})^a \cong \lim_j (R^{[j]})^a$ , d'où l'assertion.  $\square$

**4.2.2. Remarque.** — Pour  $i \geq j$ , l'isomorphisme d'algèbres perfectoides  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \{ \frac{\varpi^j}{T} \} \rightarrow \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \{ \frac{\varpi^i}{T} \} \{ \frac{\varpi^j}{T} \}$  donne lieu à un presque-isomorphisme  $\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \rightarrow \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle, (\frac{\varpi^i}{T})^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \hat{\otimes}_{\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle} \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$  (prop. 3.6.1), d'où un presque-isomorphisme  $R^{[j]} \rightarrow R^{[i]^{[j]}}$ .

**4.2.3.** Voici une variante perfectoides du théorème d'extension de Riemann.

**Théorème 4.2.2.** — Soient  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}$ -algèbre (presque) perfectoides et  $g$  un élément de  $\mathcal{A}^o$  non diviseur de zéro. On suppose que  $\mathcal{A}$  contient une suite compatible de racines  $p^m$ -ièmes de  $g$ . Alors

$$(4.7) \quad \lim \mathcal{A} \left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\}^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o,$$

qui est la fermeture complètement intégrale de  $\mathcal{A}^o$  dans  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ .

*Démonstration.* — Le cas presque perfectoides se ramène au cas perfectoides en remplaçant  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{A}^\natural$  (qui contient encore  $g^{\frac{1}{p^\infty}}$ ). Supposons donc  $\mathcal{A}$  perfectoides. D'après la prop. 3.6.1,  $\mathcal{A}$  perfectoides implique  $\mathcal{A}\{ \frac{\varpi^j}{g} \}$  perfectoides, et en outre  $\mathcal{A}^o\langle (\frac{\varpi^j}{g})^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \rightarrow \mathcal{A}\{ \frac{\varpi^j}{g} \}^o$  est un presque-isomorphisme dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ , donc aussi dans  $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}]))$ .

Appliquant la prop. 4.2.1 avec  $R := \mathcal{A}^o/\varpi^r$  et  $(R^{[j]})^a \cong (\mathcal{A}\{ \frac{\varpi^j}{g} \}^o/\varpi^r)^a$ , on obtient

$$(4.8) \quad (\mathcal{A}^o/\varpi^r)^a \cong \lim \left( \mathcal{A} \left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\}^o / \varpi^r \right)^a.$$

En passant à la limite sur  $r \rightarrow \infty$ , puis en intervertissant les limites, cela donne

$$(\mathcal{A}^o)^a \cong \lim \left( \mathcal{A} \left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\}^o \right)^a.$$

Appliquant le foncteur  $(\ )_*$  des presque-éléments, qui commute aux limites, et compte tenu de la formule (2.14) et du lemme 2.8.2, on trouve  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o \cong \lim \mathcal{A}\{ \frac{\varpi^j}{g} \}^o$ .

Montrons ensuite que  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]}^*$  est une égalité, c'est-à-dire la condition (4) du lemme 2.5.3 :

**Lemme 4.2.3.** — Pour toute  $\mathcal{K}\langle\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ -algèbre perfectoïde  $\mathcal{B}$ , les conditions équivalentes du lemme 2.5.3 sont satisfaites. En particulier, si  $g$  désigne l'image de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathcal{B}$ ,  $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$  est complètement intégralement fermée dans  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ .

On va établir la condition (1) de ce lemme :  $(a \in \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}], a^p \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o) \Rightarrow a \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ . Notons  $a_j$  l'image de  $a$  dans  $\mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^u$ . On a  $a \in \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}] \Rightarrow \exists m \in \mathbf{N}, \forall j \in \mathbf{N}, g^m a_j \in \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$  (et multipliant par  $(\frac{\varpi^j}{g})^m$ ,  $\varpi^{jm} a_j \in \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$ ). Si  $d_j^p \in \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$ , on conclut du sorite 2.3.1 (5e) que  $a_j \in \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$ . D'où, à la limite,  $a \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ .

Cela termine la preuve du théorème.  $\square$

**4.2.4. Remarque.** — Si la multiplication par  $g$  est *isométrique*, le théorème donne :  $\text{ulim } \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\} = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}$ , qui est la fermeture complètement intégrale de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ . En outre la preuve se simplifie un peu par rapport à celle de (4.7) : on n'a alors à invoquer la prop. 4.2.1 que dans le cas où  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{[j]}$  est injectif (c'est-à-dire quand  $\mathbf{R} = \mathbf{S}^j$ ).

**Corollaire 4.2.4.**

- (1) Munissons  $\mathcal{A}$  de sa norme spectrale. Alors  $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}])^\natural$  est la plus grande  $\mathcal{A}$ -algèbre perfectoïde spectrale contenue dans  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ .
- (2) On a  $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o)^b \cong g^{b-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^{bo}$ , donc aussi  $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}])^\natural \cong (g^{b-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^{bo}[\frac{1}{\varpi^b}])^\natural$ .

*Démonstration.* — (1) Soit  $\mathcal{A}'$  une  $\mathcal{A}$ -algèbre perfectoïde spectrale ( $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  est donc supposée continue) contenue dans  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$  (en tant que  $\mathcal{A}$ -algèbre « abstraite », non topologisée). D'après le lemme 2.6.2, les morphismes  $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\} \rightarrow \mathcal{A}'\{\frac{\varpi^j}{g}\}$  sont des isomorphismes d'algèbres de Banach. D'après le point (2) du théorème précédent, on a donc, en passant à la limite uniforme,  $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}] = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}'^o[\frac{1}{\varpi}]$ . Ainsi  $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}])^\natural$  contient  $\mathcal{A}'^\natural = \mathcal{A}'$ .

(2) On a  $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o)^b = (\lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o)^b = \lim \mathcal{A}^b\{\frac{\varpi^{bj}}{g^b}\}^o = g^{b-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^{bo}$  en vertu du th. 4.2.2 et de la prop. 3.6.1.  $\square$

**4.2.5. Remarque.** — On peut se demander si, sans supposer que  $\mathcal{A}$  contienne  $g^{\frac{1}{p^\infty}}$ , il demeure vrai que  $\lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$  est la fermeture complètement intégrale de  $\mathcal{A}^o$  dans  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ . Supposons car  $\mathcal{K} = 0$  comme il est loisible, et posons  $\mathcal{K}' := \widehat{\mathcal{K}(\zeta_{p^\infty})}$ ,  $\mathcal{A}' := \mathcal{K}' \hat{\otimes}_{\mathcal{K}}^u \mathcal{A}(g^{\frac{1}{p^\infty}})$ . Le groupe des  $\mathcal{K}$ -automorphismes continus de  $\mathcal{K}'$  est un sous-groupe fermé  $\Gamma$  de  $\mathbf{Z}_p^\times$ . En utilisant par exemple la remarque 2.2.7, on voit que  $\mathcal{A}$  se plonge isométriquement dans  $\mathcal{A}'$ . Or  $\mathcal{K}'$  est un corps perfectoïde (prop. 3.1.1),  $\mathcal{A}'$  est une  $\mathcal{K}'$ -algèbre perfectoïde (cf. 3.6.1), le produit semi-direct  $G$  de  $\Gamma$  et  $\mathbf{Z}_p$  agit continûment sur  $\mathcal{A}'$  et fixe  $\mathcal{A}$ . Compte



tenu de la formule (2.20), on a alors

$$\begin{aligned} \lim \mathcal{A} \left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\}^o &\subset \left( \lim \mathcal{A}' \left\{ \frac{\varpi^j}{g} \right\}^o \right)^G = (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}'^o)^G = (\mathcal{A}'^o)_{\mathcal{A}'[\frac{1}{g}]}^{o*} \\ &= (\mathcal{A}'^G)_{(\mathcal{A}'^G)[\frac{1}{g}]}^{o*}. \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, si  $a \in \mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$  est presque entier sur  $\mathcal{A}^o$ , ses images dans chaque  $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o[\frac{1}{g}] \subset \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$  le sont sur  $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$  donc sont dans  $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$  (point 5) du sorite 2.3.1), et on a donc  $a \in \lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$ . Si  $\mathcal{A}'^G = \mathcal{A}$ , on conclut que  $\lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o = \mathcal{A}_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]}^{o*}$ . Notons que  $\mathcal{A}'$  est le complété d'une sous-algèbre stable sous  $G$  dont les  $G$ -invariants se réduisent à  $\mathcal{A}$ , mais il n'est pas clair pour autant que l'égalité  $\mathcal{A}'^G = \mathcal{A}$  (du type Ax-Sen-Tate) vaille en général.

**4.2.6. Exemple :**  $\hat{A}_\infty$ . — Comme les anneaux noethériens  $A_i^o$  sont intégralement clos et entiers les uns sur les autres, il est facile de voir que  $A_\infty = \cup A_i^o$  est complètement intégralement clos. Le passage au complété  $\hat{A}_\infty$  ne va pas de soi ; on le contourne en utilisant la technique de [8, V, n. 4 prop. 15] (voir aussi [2, lemma A6]).

On a  $\hat{A}_\infty^o = \widehat{\cup A_i^o}$  et  $\hat{A}_\infty^o$  s'identifie à  $W(k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]]) \hat{\otimes}_{W(k)} \hat{K}_\infty^o$  (cf. 3.2.3 (2)) ; ainsi, tout élément  $a \in \hat{A}_\infty^o$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$(4.9) \quad \sum \varpi^s [a_s], \quad a_s \in k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]],$$

et où  $s$  décrit une suite discrète, finie ou tendant vers l'infini dans  $\frac{1}{p-1} \mathbf{N}[\frac{1}{p}]$ . De manière analogue, tout élément  $b \in \widehat{Q(\hat{A}_\infty^o)}$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$(4.10) \quad \sum \varpi^s [b_s], \quad b_s \in k((T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}})).$$

Par approximation successive, on montre alors que si les puissances de  $b \in \widehat{Q(\hat{A}_\infty^o)}$  sont contenues dans un  $\hat{A}_\infty^o$ -module de type fini, alors chaque coefficient  $[b_s]$  est le relevé d'un élément  $b_s \in k((T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}))$  dont toutes les puissances sont contenues dans un  $k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]]$ -module de type fini. On est donc ramené à la complète intégralité de  $k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]]$ , qui découle de l'intégralité des  $k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p}}]]$  puisque ces anneaux noethériens sont entiers (et même finis) les uns sur les autres.

Soient  $\overline{Q(A)}$  une clôture algébrique du corps des fractions  $Q(A)$  de  $A$ , et  $F$  le sous-corps engendré par  $\cup A_i$  et les racines  $p$ -primaires d'un élément  $g \in A$  ;  $c$ 'est une extension galoisienne infinie de  $Q(A)$  de groupe  $G_0 := \mathbf{Z}_p^{n+1} \times \mathbf{Z}_p^\times$  (le dernier facteur  $\mathbf{Z}_p$  agissant sur  $g^{\frac{1}{p^\infty}}$  selon l'action kummerienne usuelle). Soit  $\tilde{A}$  la fermeture intégrale de  $A$  dans  $F$ , et

$\hat{\mathbb{A}}$  son complété  $p$ -adique et  $\mathcal{A}' := \hat{\mathbb{A}}[\frac{1}{p}]$ ; c'est une algèbre de Banach multiplicativement normée et  $\mathcal{A}'^o = \hat{\mathbb{A}}$ . L'action de  $G_0$  se prolonge à  $\tilde{\mathbb{A}}$  et  $\mathcal{A}'^o$ . Un théorème de type Ax-Sen-Tate dû à J.-P. Wintenberger [35] montre, compte tenu de ce que  $\mathbb{A}$  est régulier, que  $\mathcal{A}'^{oG_0} = \mathbb{A}$  - et plus précisément que  $H^1(G_0, \tilde{\mathbb{A}})$  est annullé par  $p$  si  $p$  est impair et par 4 si  $p = 2$ , ce qui implique le résultat compte tenu de la suite exacte [35, prop. 1]

$$0 \rightarrow \mathbb{A}/p^m \mathbb{A} \rightarrow (\tilde{\mathbb{A}}/p^m \tilde{\mathbb{A}})^{G_0} \rightarrow H^1(G_0, \tilde{\mathbb{A}})(p^m) \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, on a un épimorphisme extrémal  $\hat{\mathbb{A}}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle \rightarrow \mathcal{A}'$ , donc  $\mathcal{A}'$  est perfectoïde (cf. 3.6.1 ; c'est même un isomorphisme si  $\hat{\mathbb{A}}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$  est multiplicativement normée), et on peut lui appliquer le th. 4.2.2. On conclut comme ci-dessus que

$$(4.11) \quad \mathbb{A} = \lim A_0 \left\{ \frac{p^j}{g} \right\}^o.$$

Si  $G_i \subset G_0$  désigne le sous-groupe ouvert correspondant à l'extension galoisienne  $Q(A_i)$ , on a encore que  $H^1(G_i, \tilde{\mathbb{A}})$  est annullé par  $p$  si  $p$  est impair et par 4 si  $p = 2$ ; pour  $G = \lim G_i$ ,  $H^1(G, \tilde{\mathbb{A}}) = \text{colim } H^1(G_i, \tilde{\mathbb{A}})$  l'est de même, et on conclut par le même argument que  $\mathcal{A}'^{oG} = \widehat{\text{colim } A_i^o} = \hat{\mathbb{A}}_\infty^o$  et

$$(4.12) \quad \hat{\mathbb{A}}_\infty^o = \lim \hat{\mathbb{A}}_\infty \left\{ \frac{p^j}{g} \right\}^o.$$

**4.2.7. Remarque.** — Le théorème de Wintenberger s'applique aussi si l'anneau normal de base est désingularisable, par exemple de dimension  $\leq 2$ . Il s'applique en particulier aux anneaux  $V_i[[T^{\frac{1}{2^i}}]][\sqrt{g}, \frac{1}{2}]^o$  de l'exemple 3.4.2 (avec  $g = T + 4$ ), et on en déduit comme ci-dessus que  $\hat{\mathbb{A}}_\infty \langle g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{2\mathbb{Z}_2} = \hat{\mathbb{A}}_\infty[\sqrt{g}]$ .

**4.3. Limite uniforme vs. limite perfectoïde.** — La proposition suivante analyse la situation abordée en 3.8.4, et prépare le terrain pour le th. 4.4.2. De nouveau,  $\mathcal{K}$  désigne un corps perfectoïde de caractéristique 0,  $\varpi$  un élément de  $\mathcal{K}^{oo} \setminus 0$  tel que  $p\mathcal{K}^o \subset \varpi\mathcal{K}^o$ , et  $\varpi_{\frac{1}{p}}$  un élément de norme  $|\varpi|_{\frac{1}{p}}$ .

**Proposition 4.3.1.** — Soient  $(\mathcal{A}^\alpha)$  un système projectif de  $\mathcal{K}$ -algèbres perfectoïdes, et  $\mathcal{A}^\natural \rightarrow \mathcal{A}$  le morphisme canonique entre limite perfectoïde et limite uniforme.

Considérons les conditions suivantes :

- (1)  $\mathcal{A}$  est perfectoïde,
- (2)  $\mathcal{A}^\natural \rightarrow \mathcal{A}$  est un isomorphisme ;
- (3) le morphisme composé  $\mathcal{A}^{\natural o} / \varpi \rightarrow \mathcal{A}^o / \varpi \rightarrow \lim (\mathcal{A}^{\alpha o} / \varpi)$  (induit par les morphismes  $\mathcal{A}^{\natural o} / \varpi \cong \mathcal{A}^{\natural o} / \varpi^b \rightarrow \mathcal{A}^{\alpha b o} / \varpi^b \cong \mathcal{A}^{\alpha o} / \varpi$ ) est presque surjectif,

- (4) *Le morphisme  $\lim (\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi) \otimes_{\mathcal{K}^0/\varpi, \mathbf{F}} \mathcal{K}^0/\varpi \xrightarrow{\phi} \lim (\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi)$  induit par Frobenius est presque surjectif,*  
 (5)  $\lim (\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi) \rightarrow \lim (\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi_{\frac{1}{p}})$  est presque surjectif.

On a

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5).$$

*Démonstration.* — Posons  $\mathfrak{L} := \lim (\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi)$  et  $\mathfrak{L}_{\frac{1}{p}} := \lim (\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi_{\frac{1}{p}})$  pour abrégier. D'après la formule (3.17), on a

$$(4.13) \quad (\mathcal{A}^{\natural})^{b_0} = \mathcal{A}^{b_0} = \lim_{\mathbf{F}} \mathfrak{L}.$$

(1)  $\Leftrightarrow$  (2) est clair (cf. 3.8.1).

(3)  $\Rightarrow$  (4) : (3) signifie que  $\lim_{\mathbf{F}} \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$  est presque surjectif, donc la dernière flèche de transition aussi, ce qui donne (4).

(4)  $\Leftrightarrow$  (5) : notons  $\sigma$  l'isomorphisme  $\mathcal{K}^0/\varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{K}^0/\varpi$ , et  $\rho$  le morphisme canonique  $\mathfrak{L}/\varpi_{\frac{1}{p}} \rightarrow \mathfrak{L}_{\frac{1}{p}}$ . Puisque les  $\mathcal{A}^{\alpha}$  sont perfectoïdes, on a un système compatible d'isomorphismes de Frobenius  $(\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi_{\frac{1}{p}}) \otimes_{\mathcal{K}^0/\varpi_{\frac{1}{p}}, \sigma} \mathcal{K}^0/\varpi \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi$ , et par passage à la limite un isomorphisme  $\psi : \mathfrak{L}_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^0/\varpi_{\frac{1}{p}}, \sigma} \mathcal{K}^0/\varpi \xrightarrow{\sim} \mathfrak{L}$ . On a d'autre part un isomorphisme

$$\iota : \mathfrak{L} \otimes_{\mathcal{K}^0/\varpi, \mathbf{F}} \mathcal{K}^0/\varpi \xrightarrow{\sim} \mathfrak{L}/\varpi_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^0/\varpi_{\frac{1}{p}}, \sigma} \mathcal{K}^0/\varpi,$$

et  $\phi$  est le composé  $\psi \circ (\rho \otimes 1) \circ \iota$ . Donc  $\phi$  est presque surjectif si et seulement si  $\rho$  l'est.

(4)  $\Rightarrow$  (3) : (4) équivaut à la presque surjectivité de  $\mathfrak{L} \otimes_{\mathcal{K}^0/\varpi, \mathbf{F}} \mathcal{K}^0/\varpi \xrightarrow{\mathbf{F}^{\otimes 1}} \mathfrak{L}$ . Cette dernière entraîne la surjectivité de  $\mathbf{F} : \mathcal{K}^{oo} \mathfrak{L} \rightarrow \mathcal{K}^{oo} \mathfrak{L}$ . Par le lemme de Mittag-Leffler pour les  $\mathbf{F}_p$ -espaces vectoriels, on en déduit la surjectivité de  $\lim_{\mathbf{F}} \mathcal{K}^{oo} \mathfrak{L} \rightarrow \mathcal{K}^{oo} \mathfrak{L}$ , d'où la presque surjectivité de  $\lim_{\mathbf{F}} \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$ .

(3) + (4)  $\Rightarrow$  (1) : d'après le lemme 2.8.1,  $\mathcal{A}^0/\varpi \rightarrow \mathfrak{L}$  est injectif. Sous (3), il est presque surjectif, donc est en fait un presque-isomorphisme, et (4) entraîne alors que le morphisme  $(\mathcal{A}^0/\varpi) \otimes_{\mathcal{K}^0/\varpi, \mathbf{F}} \mathcal{K}^0/\varpi \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}^0/\varpi$  induit par Frobenius est presque surjectif.  $\square$

**4.3.1. Remarque.** — On peut appliquer le même argument dans le cadre  $(\mathcal{K}^0[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}], \mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{K}^{oo}, \mathcal{K}^0[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}])$ . Soit  $(\mathcal{A}^{\alpha})$  un système projectif de  $\mathcal{K}(\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}})$ -algèbres perfectoïdes, de limite uniforme  $\mathcal{A}$ . Si  $\lim (\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi) \rightarrow \lim (\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi_{\frac{1}{p}})$  est presque surjectif, alors  $\mathcal{A}^{\natural} \rightarrow \mathcal{A}$  est un presque-isomorphisme dans ce cadre, *i.e.*  $\mathcal{A}$  est presque perfectoïde (cf. prop. 3.5.4); en outre,  $\mathcal{A}^0/\varpi \rightarrow \lim (\mathcal{A}^{\alpha_0}/\varpi)$  est un presque-isomorphisme.

**4.4.** *Limite uniforme d'algèbres perfectoides « en gigogne ».* — On étudie ici dans quelle mesure la limite uniforme d'un système projectif d'algèbres perfectoides  $\mathcal{B}^i$  est (presque) perfectoïde, dans la situation où les  $\mathcal{B}^i$  se déduisent les unes des autres par localisation ( $\mathcal{B}^i\{\frac{\varpi^j}{g}\} \cong \mathcal{B}^j$ ).

**4.4.1.** Reprenons la situation et les notations de 4.2.1, et plaçons-nous dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi\mathbb{T})^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}])$ .

*Proposition 4.4.1.* — Soit  $(\mathbf{R}^i)_{i \in \mathbf{N}}$  un système projectif de  $(\mathcal{K}^o/\varpi^r)[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}]$ -algèbres tel que pour tout  $i \geq j$ , les morphismes canoniques  $\mathbf{R}^{i[j]} \rightarrow \mathbf{R}^{j[j]} \leftarrow \mathbf{R}^j$  soient des presque-isomorphismes. Alors  $\lim_j^1 (\mathbf{R}^j)^a = 0$ .

*Démonstration.* — Posons  $u_{i[j]}^s := 1 \otimes (\frac{\varpi^j}{\mathbb{T}})^s \in \mathbf{R}^{i[j]} = \mathbf{R}^i \otimes_{\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}]} \mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}, (\frac{\varpi^j}{\mathbb{T}})^{\frac{1}{p^\infty}}]$ .

Pour toute sous- $(\mathcal{K}^o/\varpi^r)[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}]$ -algèbre  $\mathbf{R}^{i'}$  de  $\mathbf{R}^i$ , introduisons les sous- $\mathbf{R}^{i'}$ -modules

$$(4.14) \quad (\mathbf{R}^{i'})^{[j]k} := \sum_{s \in \mathbf{N}[\frac{1}{p}][0, \frac{1}{p^k}]} \mathbf{R}^{i'} \cdot u_{i[j]}^s \subset \mathbf{R}^{i[j]}.$$

Pour  $\mathbf{R}^{i'} = \mathbf{R}^i$ , on obtient ainsi un triple système projectif  $(\mathbf{R}^{i[j]k})$  de  $(\mathcal{K}^o/\varpi^r)[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}]$ -modules indexé par  $(i, j, k)$ .

Comme  $u_{i[j]}^s$  s'envoie sur 0 dans  $\mathbf{R}^{i[j]}$  si  $s(j' - j) \geq r$ ,  $\mathbf{R}^{i[j']}] \rightarrow \mathbf{R}^{i[j]}$  se factorise à travers  $\mathbf{R}^{i[j]k}$  dès que  $j' \geq j + rp^k$ , d'où

$$(4.15) \quad \lim_j^1 (\mathbf{R}^j)^a \cong \lim_{ij}^1 (\mathbf{R}^{i[j]})^a \cong \lim_{ijk}^1 (\mathbf{R}^{i[j]k})^a.$$

Comme  $\varpi^{\frac{1}{p^k}} u_{i[j]}^s$  est l'image dans  $\mathbf{R}^{i[j]}$  de  $\varpi^{\frac{1}{p^k} - s} u_{i[j+1]}^s$  pour  $s \leq \frac{1}{p^k}$ , le conoyau de  $\mathbf{R}^{i[j+1]k} \rightarrow \mathbf{R}^{i[j]k}$  est annulé par  $\varpi^{\frac{1}{p^k}}$ .

Comme  $\mathbb{T}^{\frac{1}{p^k}} u_{i[j]}^s$  est dans l'image de  $\mathbf{R}^i$  pour  $s \leq \frac{1}{p^k}$ , le conoyau de  $\mathbf{R}^{i, [j], k+1} \rightarrow \mathbf{R}^{i[j]k}$  est annulé par  $\mathbb{T}^{\frac{1}{p^k}}$ .

Enfin,  $(\mathbf{R}^{i'[j]})^{[j], k+1}$  est le sous- $\mathbf{R}^{i'}$ -module de  $(\mathbf{R}^{i'[j]})^{[j]} \cong \mathbf{R}^{i[j]}$  engendré par les produits des images des  $u_{i'[j]}^s$  et des  $u_{i[j]}^t$  pour  $t \leq \frac{1}{p^{k+1}}$ , c'est-à-dire par les  $\varpi^{(i-j)s} u_{i[j]}^{s+t}$ . Supposons  $i' \geq i \geq j + \frac{rp^{k+1}}{p-1}$ . Alors la double inégalité  $(s+t) \geq \frac{1}{p^k}$ ,  $t \leq \frac{1}{p^{k+1}}$  implique  $s(i-j) \geq r$ , de sorte que, sous la condition  $t \leq \frac{1}{p^{k+1}}$ ,  $\varpi^{(i-j)s} u_{i[j]}^{s+t}$  est nul si  $s+t \geq \frac{1}{p^k}$ , et appartient à l'image de  $\mathbf{R}^{i'[j]k}$  sinon; d'où l'inclusion  $((\mathbf{R}^{i'[j]})^{[j], k+1})^a \subset \text{Im}(\mathbf{R}^{i'[j]k} \rightarrow \mathbf{R}^{i'[j]})^a$ , ou encore  $(\mathbf{R}^{i[j], k+1})^a \subset \text{Im}(\mathbf{R}^{i[j]k} \rightarrow \mathbf{R}^{i[j]})^a$ .

Prenons alors  $j = k$ , choisissons une suite croissante  $i_k \geq k + \frac{p^{k+1}}{p-1}$ , et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}^{i_{k+1}, [k+1], k+1} & \xrightarrow{a} & \mathbf{R}^{i_{k+1}, [k], k+1} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{i_k, [k], k+1} \\ \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow d \\ \mathbf{R}^{i_{k+1}, [k+1], k} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{i_{k+1}, [k], k} & \xrightarrow{c} & \mathbf{R}^{i_k, [k], k} \end{array}$$

D'après ce qui précède, Coker  $a$  (resp. Coker  $b$ ) est annulé par  $\varpi^{\frac{1}{p^{k+1}}}$  (resp.  $T^{\frac{1}{p^k}}$ ),  $\text{Im } d$  est presque contenu dans  $\text{Im } c$ , donc Coker  $c$  est presque quotient de Coker  $d$ , donc annulé par  $(\varpi T)^{\frac{1}{p^k}}$ . On trouve que le conoyau du composé  $cba$  est annulé par  $(\varpi T)^{\frac{3}{p^k}}$ . Puisque  $\sum \frac{3}{p^k}$  converge, on obtient  $\lim^1 (\mathbf{R}^{i_k, [k], k})^a = 0$  (cf. [15, lemme 2.4.2 iii]).

Compte tenu de (4.15), on conclut que  $\lim^1_j (\mathbf{R}^j)^a = \lim^1_{ijk} (\mathbf{R}^{i[j], k})^a = 0$ .  $\square$

**4.4.2.** Si  $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre presque perfectoïde, et  $g$  l'image de  $T$  dans  $\mathcal{B}$ , posons  $\mathcal{B}^{[j]} := \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}$ . C'est une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre perfectoïde : en effet, il découle du lemme 2.6.2 que  $\mathcal{B}^{[j]} \cong \mathcal{B}^{2[j]}$ , qui est perfectoïde d'après la prop. 3.6.1.

Soit  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre presque perfectoïde. Rappelons que la catégorie  $\mathcal{A}^\hat{\mathbf{u}}\mathbf{Ban}$  des  $\mathcal{A}^\hat{\mathbf{u}}$ -algèbres de Banach uniformes a pour objets les  $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach uniformes et pour morphismes ceux obtenus après application du foncteur  $(\ )^{oa}$  (cf. §2.3.6). Les  $\mathcal{A}^\hat{\mathbf{u}}$ -algèbres presque perfectoïdes forment une sous-catégorie pleine  $\mathcal{A}^\hat{\mathbf{u}}\mathbf{pPerf}$  (cf. §3.5.4). D'après la formule (2.24), on a un isomorphisme canonique

$$(4.16) \quad \mathcal{B}^{[j]} \cong \mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{[j]}.$$

Notons  $2\text{-lim } \mathcal{A}^{[j]}\mathbf{Perf}$  la catégorie des systèmes projectifs de  $\mathcal{A}^{[j]}$ -algèbres perfectoïdes  $\mathcal{B}^j$  tels que, dans la factorisation canonique de chaque morphisme de transition  $\mathcal{B}^i \rightarrow \mathcal{B}^i\{\frac{\varpi^j}{g}\} \rightarrow \mathcal{B}^j$ , le second morphisme soit un isomorphisme<sup>22</sup>. La localisation induit un foncteur

$$\mathcal{A}^\hat{\mathbf{u}}\mathbf{pPerf} \xrightarrow{\varsigma} 2\text{-lim } \mathcal{A}^{[j]}\mathbf{Perf}.$$

**Théorème 4.4.2.** — *Le foncteur  $\varsigma$  admet ulim comme quasi-inverse à gauche et adjoint à droite. En particulier, il induit une équivalence de  $\mathcal{A}^\hat{\mathbf{u}}\mathbf{pPerf}$  avec une sous-catégorie (pleine) coréflexive de  $2\text{-lim } \mathcal{A}^{[j]}\mathbf{Perf}$ .*

*Démonstration.* — Commençons par prouver que pour tout objet  $(\mathcal{B}^j)$  de  $2\text{-lim } \mathcal{A}^{[j]}\mathbf{Perf}$ , la limite uniforme  $\mathcal{B}$  est presque perfectoïde (c'est clair si car  $\mathcal{K} = p$

<sup>22</sup> le système  $(\mathcal{B}^j)$  muni des inverses de ces isomorphismes constitue alors un objet admissible strict au sens de [34, A.4], et  $2\text{-lim } \mathcal{A}^{[j]}\mathbf{Perf}$  est bien une 2-limite catégorique.

puisque la perfection est préservée à la limite des  $\mathcal{A}^{[l]o}$ ). Plaçons-nous de nouveau dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi\mathbb{T})^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}])$ .

En appliquant la prop. 4.4.1 avec  $\mathcal{R}^j := \mathcal{B}^{j_0}/\varpi^r$  (on a bien  $\mathbb{R}^{i[j]a} \cong \mathbb{R}^{j[i]a} \cong \mathbb{R}^{ja}$  pour tout  $i \geq j$ ), on obtient  $\lim_j^1 (\mathcal{B}^{j_0}/\varpi^r)^a = 0$ . Comme  $\mathcal{B}^{j_0}$  est plate sur  $\mathcal{K}^o$ , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{B}^{j_0}/\varpi^{1-\frac{1}{p}} \rightarrow \mathcal{B}^{j_0}/\varpi \rightarrow \mathcal{B}^{j_0}/\varpi^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

et par presque-nullité de la  $\lim_j^1$ , on obtient encore une suite exacte à la limite :

$$0 \rightarrow \lim_j (\mathcal{B}^{j_0}/\varpi^{1-\frac{1}{p}})^a \rightarrow \lim_j (\mathcal{B}^{j_0}/\varpi)^a \rightarrow \lim_j (\mathcal{B}^{j_0}/\varpi^{\frac{1}{p}})^a \rightarrow 0.$$

La variante de prop. 4.3.1 signalée dans la rem. 4.3.1 entraîne alors que  $\mathcal{B}$  est presque perfectoïde.

Que  $\text{ulim}$ , ou de manière équivalente  $\text{ulim}^\natural$ , soit quasi-inverse à gauche de  $\zeta$  découle du th. 4.2.2. Enfin, soient  $\mathcal{C}$  un objet de  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}$  et  $(\mathcal{B}^i)_j$  un objet de  $2\text{-lim } \mathcal{A}^{[l]}\text{-Perf}$ . L'application  $\text{Hom}(\zeta(\mathcal{C}), (\mathcal{B}^i)_j) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \text{ulim } \mathcal{B}^i)$  induite par  $\text{ulim}$  admet comme inverse (fonctoriellement en  $(\mathcal{C}, (\mathcal{B}^i)_j)$ ) l'application induite par  $(\ )^{[l]}$  suivi du morphisme canonique  $(\mathcal{B}^{[l]})_j \rightarrow (\mathcal{B}^i)_j$ . Pour la seconde assertion, voir [24, IV 4 ex. 4].  $\square$

**4.4.3. Remarques.** — (1) On ne peut remplacer les  $\mathcal{K}\langle\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ -algèbres par des  $\mathcal{K}\langle\mathbb{T}\rangle$ -algèbres, comme on le voit sur l'ex. 3.8.5.

(2) En vertu du lemme 3.5.3, on pourrait remplacer  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}$  par sa sous-catégorie pleine équivalente  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-Perf}$ , et  $\text{ulim}$  par  $\text{ulim}^\natural$ . Si la question 3.5.1 a une réponse positive, il est même inutile de substituer  $\text{ulim}^\natural$  à  $\text{ulim}$ .

*Question 4.4.3.* —  $\zeta$  est-il essentiellement surjectif (et par suite une équivalence) ?

Il revient au même de demander si l'on retrouve les  $\mathcal{B}^i$  par localisation affinoïde de  $\text{ulim } \mathcal{B}^i$ . Voici un cas particulier important où c'est bien le cas :

**Proposition 4.4.4.** — Soit  $\mathcal{B}'$  une  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ -algèbre étale finie.

- (1) Les  $\mathcal{B}^i := \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[i]}$  forment un objet de  $2\text{-lim } \mathcal{A}^{[l]}\text{-Perf}$ . On note  $\mathcal{B}$  la limite uniforme.
- (2) Les coïnités d'adjonction  $\mathcal{B}^{[l]} \xrightarrow{\eta_j} \mathcal{B}^j$  sont des isomorphismes.
- (3) Elles proviennent en fait d'un isomorphisme  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}'$ .

*Démonstration.* — (1) Les  $\mathcal{B}^i$  forment un système projectif de  $\mathcal{A}^{[i]}$ -algèbres étales finies, donc perfectoïdes (th. 3.4.1). On a donc  $\mathcal{B}^i \otimes_{\mathcal{A}^{[i]}} \mathcal{A}^{[i]} = \mathcal{B}^i \otimes_{\mathcal{A}^{[\frac{1}{g}]}} \mathcal{A}^{[i]} \otimes_{\mathcal{A}^{[i]}} \mathcal{A}^{[i]} \cong \mathcal{B}^i$ , et comme  $\mathcal{B}^i$  est projectif fini sur  $\mathcal{A}^{[i]}$ ,  $\mathcal{B}^i \otimes_{\mathcal{A}^{[i]}} \mathcal{A}^{[i]} = \mathcal{B}^i \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^{[i]}} \mathcal{A}^{[i]} \cong \mathcal{B}^i \{\frac{\varpi^j}{g}\}$ .

(2) La fermeture intégrale  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^i}^{o+}$  s'envoie naturellement vers la fermeture intégrale  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^i}^{[i]o+}$  qui n'est autre que  $\mathcal{B}^i$  d'après le cor. 3.4.3, ce qui fournit à la limite un morphisme canonique  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^i}^{o+} \rightarrow \mathcal{B}^i$ , d'où aussi  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^i}^{o+}[\frac{1}{\varpi g}] = \mathcal{B}^i \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ . Le morphisme composé  $\delta_j : \mathcal{B}^i = \mathcal{B}^i \otimes_{\mathcal{A}^{[\frac{1}{g}]}} \mathcal{A}^{[i]} \xrightarrow{\delta \otimes 1} \mathcal{B}[\frac{1}{g}] \otimes_{\mathcal{A}^{[\frac{1}{g}]}} \mathcal{A}^{[i]} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{[i]} \rightarrow \mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{[i]} = \mathcal{B}^{[i]}$  est un inverse à droite de  $\eta_j$  (lequel provient du morphisme  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^i}^{o+}$ -linéaire  $\mathcal{B}^o \rightarrow \mathcal{B}^{i0}$ ). Or par adjonction, tout morphisme de la forme  $\zeta(\mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B}^i)_j$  se factorise de manière unique en un morphisme  $\zeta(\mathcal{C}) \rightarrow \zeta(\mathcal{B})$ . Appliquant ceci à  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$  et au morphisme de composantes  $\eta_j(\delta_j \eta_j) = \eta_j$ , on en déduit  $\delta_j \eta_j = id_{\mathcal{B}^{[i]}}$ . Donc  $\eta_j$  est un isomorphisme d'inverse  $\delta_j$ <sup>23</sup>.

(3) Par ailleurs,  $\delta$  est injectif. En effet, le noyau  $\mathfrak{I}$  de  $\mathcal{B}^i \rightarrow \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$  est un idéal de trace nulle sur  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$  : en effet,  $tr(\mathfrak{I})$  est d'image nulle dans chaque  $\mathcal{A}^{[i]}$ , donc est nul puisque  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$  s'envoie injectivement dans  $\text{ulim } \mathcal{A}^{[i]}$  (lemme 2.6.3). Donc  $\mathfrak{I}$  est lui-même nul puisque  $\mathcal{B}^i$  est étale sur  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ .

Il reste à voir que  $\delta$  est surjectif. On peut remplacer  $\mathcal{A}^o$  par  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o$ , ce qui permet de supposer  $\mathcal{A}$  (complètement) intégralement fermé dans  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ .

(a) Supposons pour commencer  $\mathcal{B}^i$  galoisien sur  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$  de groupe  $G$ . On a alors

$$\mathcal{B}[\frac{1}{g}]^G = (\text{ulim } (\mathcal{B}^i \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[i]})^G)[\frac{1}{g}] = (\text{ulim } \mathcal{A}^{[i]})[\frac{1}{g}] = \mathcal{A}[\frac{1}{g}].$$

On conclut par le lemme 1.9.3 (avec  $R = \mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ ,  $S' = \mathcal{B}^i$ ,  $S = \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ ).

(b) En général, le rang de  $\mathcal{B}^i$  sur  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$  étant fini continu et borné, et  $\mathcal{A}$  étant intégralement fermé dans  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ , on peut supposer, en décomposant  $\mathcal{A}$  en un nombre fini de facteurs, que ce rang est constant, égal à  $r$ . D'après le lemme 1.9.2, on a une extension galoisienne  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}] \hookrightarrow \mathcal{C}'$  de groupe  $\mathfrak{S}_r$  se factorisant par  $\mathcal{B}^i$  et telle que  $\mathcal{B}^i = \mathcal{C}'^{\mathfrak{S}_{r-1}}$  ; d'où  $\mathcal{B}^i = \mathcal{C}'^{\mathfrak{S}_{r-1}}$  et à la limite  $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathfrak{S}_{r-1}}$ . D'après le pas (a), on a  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}[\frac{1}{g}]$ , donc  $\mathcal{B}^i = \mathcal{C}'^{\mathfrak{S}_{r-1}} = \mathcal{C}[\frac{1}{g}]^{\mathfrak{S}_{r-1}} = \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ .  $\square$

## 5. Le « lemme d'Abhyankar » perfectoïde

**5.1.** On fixe un corps perfectoïde  $\mathcal{K}$  et un élément  $\varpi \in \mathcal{K}^{oo}$  admettant une suite compatible de racines  $p^m$ -ièmes, tel que  $|p| \leq |\varpi|$ . On prend pour cadre

$$(\mathfrak{Y} = \mathcal{K}^o[\Gamma_{p^\infty}^{\frac{1}{p^\infty}}], \mathfrak{m} = (\varpi \Gamma)_{p^\infty}^{\frac{1}{p^\infty}} \mathfrak{Y}).$$

<sup>23</sup> cet argument d'adjonction montre plus généralement que toute sous-catégorie épi-corréflexive est mono-corréflexive [19, prop. 1].

Soit  $\mathcal{A}$  est une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre presque perfectoïde. Rappelons encore que la catégorie  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}$  a pour objets les  $\mathcal{A}$ -algèbres de Banach uniformes  $\mathcal{B}$  qui sont presque isomorphes à  $\mathcal{B}^{\natural}$ , et pour morphismes ceux obtenus après application du foncteur  $(\ )^{oa}$  (cf. §2.3.6).

Rappelons qu'un objet  $\mathcal{B}^{\hat{a}}$  de  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-uBan}$  est *presque étale fini* sur  $\mathcal{A}^{\hat{a}}$  si  $\mathcal{B}^a$  est étale fini sur  $\mathcal{A}^a$ . Rappelons enfin que d'après la prop. 3.5.6, si  $\mathcal{A}$  est presque perfectoïde, l'inversion de  $\varpi$  induit une équivalence

$$(5.1) \quad \mathcal{A}^{oa}\text{-Alg}^{et,fin} \xrightarrow{\xi} \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}^{p,et,fin},$$

de quasi-inverse  $(\ )^{oa}$ , entre  $\mathcal{A}^{oa}$ -algèbres étales finies et  $\mathcal{A}^{\hat{a}}$ -algèbres presque perfectoïdes presque étales finies.

**5.2.** Le théorème principal de cet article est une extension du th. 3.4.1 au cas ramifié (on retrouve 3.4.1 dans le cas où  $T^{\frac{1}{p}} \cdot 1 = 1$ ).

*Théorème 5.2.1.* — Soient  $\mathcal{K}$  un corps perfectoïde et  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre presque perfectoïde. On note  $g$  l'élément T.1 de  $\mathcal{A}^o$ . On a alors des équivalences de catégories

$$\begin{aligned} & \{ \mathcal{A}^{oa}\text{-algèbres complètes, étales finies modulo toute puissance de } p \\ & \quad \text{et étales finies après inversion de } g \} \\ & \xrightarrow{\sim} \{ \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-algèbres presque perfectoïdes, étales finies après inversion de } g \} \\ & \xrightarrow{\sim} \{ \mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-algèbres étales finies} \} \end{aligned}$$

induites par inversion de  $\varpi$  et de  $g$  respectivement.

*Question 5.2.2.* — Ces catégories sont-elles aussi équivalentes à celles de (5.1)? (cf. 5.2.1)

*Démonstration.* — Il est loisible de remplacer  $\mathcal{A}$  par toute algèbre isomorphe dans  $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^{\hat{a}}\text{-pPerf}$ , notamment par  $\mathcal{A}_{\ast}^{\hat{a}} = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}]$ . Cela permet de supposer d'emblée que  $g$  est non-diviseur de zéro et, en vertu du th. 4.2.2, que

$$(5.2) \quad \mathcal{A} \cong \text{ulim } \mathcal{A}^{[j]}.$$

Notons  $\mathcal{A}^{oa}\text{-Alg}^{(/p^{\bullet}, \frac{1}{g})et,fin}$  la première catégorie du théorème, et par  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}_g^{\frac{1}{g}et,fin}$  la seconde, et

$$\mathcal{A}^{oa}\text{-Alg}^{(/p^{\bullet}, \frac{1}{g})et,fin} \xrightarrow{\xi'} \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}_g^{\frac{1}{g}et,fin} \xrightarrow{\rho'} \mathcal{A} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{g} \end{array} \right] \text{-Alg}^{et,fin}$$

les foncteurs en jeu, dont il s'agit de montrer que ce sont des équivalences.



Commençons par prouver que  $\rho'$  est une équivalence.

Notons  $2\text{-lim } \mathcal{A}^{[l]}\text{-Alg}$  la catégorie des systèmes projectifs de  $\mathcal{A}^{[l]}$ -algèbres  $\mathcal{B}^i$  tels que, dans la factorisation canonique de chaque morphisme de transition  $\mathcal{B}^i \rightarrow \mathcal{B}^{[l]} \rightarrow \mathcal{B}^i$ , le second morphisme soit un isomorphisme.

Observons que  $(\mathcal{A}^{[l]})_j$  est un système projectif de  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ -algèbres, et considérons le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-Alg} \\ \downarrow \varsigma & & \\ 2\text{-lim } \mathcal{A}^{[l]}\text{-Perf} & \xrightarrow{\nu} & 2\text{-lim } \mathcal{A}^{[l]}\text{-Alg} \end{array}$$

où  $\rho$  est le foncteur oubli de la norme et inversion de  $g$ ,  $\nu$  est le foncteur oubli de la norme, et  $\varsigma$  est le foncteur considéré au th. 4.4.2, qui est pleinement fidèle, de quasi-inverse à gauche  $\lambda$  donné par la limite uniforme.

Après restriction aux algèbres étales finies, ce diagramme se complète d'après la prop. 4.4.4 (1), (2) en un diagramme essentiellement commutatif

$$(5.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}_g^{\text{ét. fin}} & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-Alg}^{\text{ét. fin}} \\ \downarrow \varsigma' & & \tau' \downarrow \\ 2\text{-lim } \mathcal{A}^{[l]}\text{-Perf}^{\text{ét. fin}} & \xrightarrow{\nu'} & 2\text{-lim } \mathcal{A}^{[l]}\text{-Alg}^{\text{ét. fin}} \end{array}$$

où  $\tau$  est donné par les produits tensoriels  $(- \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[l]})_j$ . D'après le th. 3.4.1,  $\nu'$  est une équivalence : on obtient un quasi-inverse canonique  $\nu'^{-1}$  en munissant chaque  $\mathcal{B}^i$  de sa norme spectrale canonique. Posons

$$\begin{aligned} \sigma &:= \lambda \nu'^{-1} \tau' : \mathcal{A}\left[\frac{1}{g}\right]\text{-Alg}^{\text{ét. fin}} \rightarrow \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}, \\ \mathcal{B}^i &\mapsto \mathcal{B} := \text{ulim } \mathcal{B}^i \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[l]}. \end{aligned}$$

On a  $\sigma \rho' = \lambda \nu'^{-1} \tau' \rho' = \lambda \nu'^{-1} \nu' \varsigma' = \lambda \varsigma' = \text{id}_{\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}_g^{\text{ét. fin}}}$ .

D'autre part, d'après la prop. 4.4.4 (3), on a un isomorphisme canonique  $\mathcal{B}^i \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}[\frac{1}{g}] = \rho' \sigma(\mathcal{B}^i)$ , ce qui montre que  $\sigma$  est à valeurs dans la  $\rho$ -préimage  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}_g^{\text{ét. fin}}$  de  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-Alg}^{\text{ét. fin}}$  dans  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-pPerf}$ , puis que  $\rho' \sigma = \text{id}_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-Alg}^{\text{ét. fin}}}$ . Ainsi les flèches horizontales de (5.3) sont des équivalences.

Prouvons ensuite que  $\xi'$  est une équivalence. Comme il est clair que  $\xi'$  est pleinement fidèle, et compte tenu de ce que  $\rho'$  est essentiellement surjectif, il suffit de montrer la

**Proposition 5.2.3.** — Soit  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{A}$ -algèbre perfectoïde dans laquelle  $g$  n'est pas diviseur de zéro, et telle que  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$  soit étale finie sur  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ . Alors pour tout  $m \in \mathbf{N}$ ,  $\mathcal{B}^{oa}/p^m$  est étale finie sur  $\mathcal{A}^{oa}/p^m$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi\mathbb{T})^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}])$ , et  $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$  est presque étale finie sur  $\mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ .

Si  $\text{car } \mathcal{K} = p$ , cela est prouvé dans [15, 3.5.28] (en prenant  $V = \mathcal{A}^o$  et  $\varepsilon = \varpi\mathbb{T}$  dans *loc. cit.*). Supposons donc  $\text{car } \mathcal{K} = 0$ .

(a) Plaçons-nous encore pour commencer dans la situation où  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$  est extension galoisienne de  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$  de groupe  $G$ . Posons pour alléger

$$(5.4) \quad \mathcal{B}_2 := \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}, \quad \mathcal{B}_2^{[j]} := \mathcal{B}^{[j]} \otimes_{\mathcal{A}^{[j]}} \mathcal{B}^{[j]}.$$

D'après la prop. 3.3.4, les complétés  $\widehat{\mathcal{B}}_2 = \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$  et  $\widehat{\mathcal{B}}_2^{[j]}$  sont des algèbres perfectoïdes et  $\widehat{\mathcal{B}}_2^{oa} = \mathcal{B}^{oa} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^{oa}} \mathcal{B}^{oa}$  (c'est vrai dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$  et a fortiori dans  $(\mathfrak{V} = \mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}], \mathfrak{m} = (\varpi\mathbb{T})^{\frac{1}{p^\infty}}\mathfrak{V})$ ). En outre,  $\widehat{\mathcal{B}}_2^{[j]} = \mathcal{B}_2^{[j]}$  car  $\mathcal{B}^{[j]}$  est étale fini sur  $\mathcal{A}^{[j]}$ . D'après le th. 4.2.2, on a

$$(5.5) \quad \lim \mathcal{A}^{[j]o} = \mathcal{A}_*^o, \quad \lim \mathcal{B}^{[j]o} = \mathcal{B}_*^o, \quad \lim \mathcal{B}_2^{[j]o} = (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_* = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \widehat{\mathcal{B}}_2^o.$$

Comme  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$  est galoisien de groupe  $G$  sur  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ ,  $\mathcal{B}^{[j]oa}$  est galoisien de groupe  $G$  sur  $\mathcal{A}^{[j]oa}$  d'après la prop. 3.4.2. On en tire que  $G$  agit par automorphismes de  $\mathcal{B}_*^o$  et  $G \times G$  par automorphismes de  $(\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*$ , et que

$$(5.6) \quad \mathcal{B}_*^{oG} = (\lim \mathcal{B}^{[j]o})^G = \lim \mathcal{A}^{[j]o} = \mathcal{A}_*^o$$

$$(5.7) \quad (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*^{G \times G} = (\lim \mathcal{B}_2^{[j]o})^{G \times G} = \lim \mathcal{A}^{[j]o} = \mathcal{A}_*^o.$$

En particulier  $\mathcal{B}_*^o$  et  $(\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*$  sont entiers sur  $\mathcal{A}_*^o$ . Les isomorphismes

$$(5.8) \quad \mathcal{B}_2^{[j]o} \xrightarrow{\sim} \prod_G \mathcal{B}_*^{[j]o}, \quad b \otimes b' \mapsto (\gamma(b)b')_{\gamma \in G}$$

induisent à la limite un isomorphisme

$$(5.9) \quad (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_* \xrightarrow{\sim} \prod_G \mathcal{B}_*^o.$$

Modulo  $p^m$  cela donne aussi

$$(5.10) \quad (\mathcal{B}^{oa}/p^m) \otimes_{\mathcal{A}^{oa}/p^m} (\mathcal{B}^{oa}/p^m) \xrightarrow{\sim} \prod_G (\mathcal{B}^{oa}/p^m),$$

i.e.  $\mathcal{B}^{oa}/p^m$  est galoisienne de groupe  $G$  sur  $\mathcal{A}^{oa}/p^m$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi\mathbb{T})^{\frac{1}{p^\infty}} \times \mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}])$ .

En particulier,  $(\mathcal{B}^o/p)[\frac{1}{g}]$  est presque plate sur  $(\mathcal{A}^o/p)[\frac{1}{g}]$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi \mathbb{T})^{\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}])$ , donc aussi dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$  puisqu'on a inversé  $g$ . Comme  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$  est étale, donc plate, sur  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$  et que  $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$  est sans  $\varpi$ -torsion, on conclut d'après [15, 5.2.1] que  $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$  est presque plate sur  $\mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ , cadre dans lequel on se place dans les lignes qui suivent. Donc  $\mathcal{B}_2^o[\frac{1}{g}] = (\mathcal{B}_2^o)_*[\frac{1}{g}]$  est presque plate sur  $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ , en particulier presque sans  $\varpi$ -torsion, de sorte que la torsion  $\varpi$ -primaire de  $\mathcal{B}_2^o$  (resp. de  $(\mathcal{B}_2^o)_* = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}_2^o$ ) est presque égale à la torsion  $g$ -primaire.

La prop. 4.4.4 (jointe à (5.5)) montre que  $(\mathcal{B}_2^o)_* \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*$  induit un isomorphisme après inversion de  $pg$ . D'après ce qui précède, le morphisme composé  $\mathcal{B}_{2*} := (\mathcal{B}_2^o)_*[\frac{1}{p}] \rightarrow \widehat{\mathcal{B}}_{2*} \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_* = (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*[\frac{1}{p}]$  est donc injectif, de sorte que  $\mathcal{B}_{2*}$  est séparé.

D'autre part,  $\widehat{\mathcal{B}}_{2*} \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*$  est isométrique : en effet, on déduit du point (3) du lemme 2.5.1 que  $(\widehat{\mathcal{B}}_{2*})/p \rightarrow (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*/p$  est injectif. Donc la norme de  $\mathcal{B}_{2*}$  est spectrale tout comme celle de  $(\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*$ . Il suit que  $\mathcal{B}_{2*}^o = \mathcal{B}_{2* \leq 1}$  est presque égal à  $(\mathcal{B}_2^o)_*/(\varpi^\infty\text{-tors})$ . On en conclut que  $\mathcal{B}_2^o[\frac{1}{g}] = (\mathcal{B}_2^o)_*[\frac{1}{g}]$  est presque égal à  $\mathcal{B}_2[\frac{1}{g}] \cap (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*[\frac{1}{g}]$ , et que les idempotents  $e_\gamma$  définissant la décomposition (5.9) sont dans  $\varpi^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}_2^o[\frac{1}{g}]$ , i.e. que  $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$  est presque galoisienne de groupe  $G$  sur  $\mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ .

(b) La réduction au cas galoisien se fait comme dans la prop. 3.4.2 (2b).

Ceci termine la preuve de la prop. 5.2.3, ainsi que celle du th. 5.2.1.  $\square$

**5.2.1. Remarque.** — Il ne semble pas qu'on puisse tirer de là que  $\mathcal{B}^{oa}$  est étale finie sur  $\mathcal{A}^{oa}$  (comme  $\mathcal{A}_*^o$  est  $p$ -adiquement hensélien, de même que son extension entière  $\mathcal{B}_*^o$ , il suffirait de voir que  $\widehat{\mathcal{B}}_{2*}^o$  contient les  $e_\gamma \in (\widehat{\mathcal{B}}_2^o)_*$ ). On ne peut invoquer l'« équivalence remarquable de Grothendieck » comme en 1.8.2 car le résultat de [15, 5.3.27] ne s'applique plus : l'idéal engendré par  $\varpi$  n'est pas « tight ». En fait, l'information qui manque ici est la presque-finitude de  $\mathcal{B}^o$  sur  $\mathcal{A}^o$  : si l'on en disposait, on conclurait par [15, 5.3.20] que  $\mathcal{B}^{oa}$  est projectif fini sur  $\mathcal{A}^{oa}$ , et il serait facile de passer de là à « étale fini ».

Par ailleurs, tenter de déduire de la prop. 2.6.1 la presque-pureté (au sens de presque-injectivité universelle) de  $\mathcal{B}^o$  sur  $\mathcal{A}^o$  se heurte au fait que pour certaines algèbres perfectoides  $\mathcal{A}$ , il existe des  $\mathcal{A}^o$ -modules de présentation finie non séparés, et même des idéaux principaux non fermés dans  $\mathcal{A}^o$  : en car  $p$ , un exemple est donné par l'idéal  $(U)$  dans  $\mathcal{K}^{bo} \langle \mathbb{T}_i^{\frac{1}{p^\infty}}, U^{\frac{1}{p^\infty}}, (\frac{\varpi^{bi} \mathbb{T}_i}{U})^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ .

**5.3. Preuve du théorème 0.3.1.** — Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{K} \langle \mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ -algèbre perfectoides, et posons  $g := \mathbb{T}.1 \in \mathcal{A}^o$ . Soit  $\mathcal{B}'$  une  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ -algèbre étale finie. Notons  $\mathcal{B}^i := \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[i]}$ ,  $\mathcal{B}$  la  $\mathcal{A}$ -algèbre presque perfectoides ulim  $\mathcal{B}^i$ , et  $\tilde{\mathcal{B}}^o$  (resp.  $\tilde{\mathcal{B}}$ ) la fermeture intégrale de  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o$  (resp.  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}]$ ) dans  $\mathcal{B}'$ . Comme la fermeture intégrale commute à la localisation, on a

$\tilde{\mathcal{B}}[\frac{1}{g}] = \mathcal{A}[\frac{1}{g}]_{\mathcal{B}'}^+ = \mathcal{B}'$ , qui n'est autre que  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$  d'après la prop. 4.4.4. On a  $\mathcal{B}^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o = (\varpi g)^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{B}^o$ , et  $\mathcal{B}^o$  est  $\varpi$ -adiquement complète.

Le th. 0.3.1 résulte alors de la proposition suivante (l'algèbre notée là  $\mathcal{B}$  est ici  $\tilde{\mathcal{B}}^{\natural}$ ).

**Proposition 5.3.1.**

- (1) On a  $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$ , et  $\tilde{\mathcal{B}}^o = (g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o)_{\mathcal{B}'}^+ = (\varpi g)^{-\frac{1}{p^\infty}} \tilde{\mathcal{B}}^o = \hat{\tilde{\mathcal{B}}}^o$  (et  $\tilde{\mathcal{B}}^o$  est presque isomorphe à  $(\mathcal{A}^o)_{\mathcal{B}'}^+$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[\mathbb{T}_{p^\infty}^{\frac{1}{g}}], \mathbb{T}_{p^\infty}^{\frac{1}{g}} \mathcal{K}^{oo}[\mathbb{T}_{p^\infty}^{\frac{1}{g}}])$ ).
- (2)  $\tilde{\mathcal{B}}^{\natural}$  est la plus grande  $\mathcal{A}$ -algèbre perfectoïde contenue dans  $\mathcal{B}'$ .
- (3) Si  $\mathcal{B}'$  est un  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ -module fidèle,  $\mathrm{Tr}_{\mathcal{B}'/\mathcal{A}[\frac{1}{g}]}(\tilde{\mathcal{B}}^o) \hookrightarrow g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o$  est un presque-isomorphisme.

*Démonstration.* — (1) On peut remplacer  $\mathcal{A}^o$  par  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o$ . Comme  $(\mathcal{A}^o)_{\mathcal{B}'}^+ \otimes_{\mathcal{A}^o} \mathcal{A}^{[j]o}$  est contenu dans la fermeture intégrale de  $\mathcal{A}^{[j]o}$  dans  $\mathcal{B}^j$ , elle-même contenue dans  $\mathcal{B}^{jo}$  (lemme 2.4.1 (1)), on a un morphisme canonique  $(\mathcal{A}^o)_{\mathcal{B}'}^+ \rightarrow \mathcal{B}^{jo}$ . Il est compatible avec les flèches de transition en  $j$ , d'où, en passant à la limite, un morphisme canonique  $(\mathcal{A}^o)_{\mathcal{B}'}^+ \rightarrow \mathcal{B}^o$ , et il suffit de montrer que c'est un isomorphisme. Comme il s'agit de sous-anneaux de  $\mathcal{B}'$ , il est injectif, ce qui ramène à montrer qu'il est surjectif, ou encore, que  $\mathcal{B}^o$  est entier sur  $\mathcal{A}^o$ , ce qui découle de (5.6) (dans le cas galoisien auquel on se ramène). La seconde assertion en découle via [15, 8.2.8].

(2) suit de (1) et du cor. 4.2.4.

(3) Si  $\mathcal{B}'$  est un  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ -module fidèle,  $\tilde{\mathcal{B}}^o$  est un  $\mathcal{A}^o$ -module fidèle, et comme le plongement  $\mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$  est isométrique,  $\tilde{\mathcal{B}}^o/p$  est un  $\mathcal{A}^o/p$ -module fidèle. Alors  $\tilde{\mathcal{B}}^{oa}/p$  est une extension étale finie de  $\mathcal{A}^{oa}/p$  (prop. 5.2.3), et la trace fournit un homomorphisme de  $(\tilde{\mathcal{B}}^{oa})_*$  sur  $(\mathcal{A}^{oa})_* = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^o$  qui est presque surjectif modulo  $p$ , donc presque surjectif d'après la version 1.3 du lemme de Nakayama.  $\square$

**5.4. Normalisation de Noether et « enveloppes » presque perfectoïdes d'algèbres affinoïdes.** —

Les constructions d'algèbres perfectoïdes<sup>24</sup> se bornent habituellement à des situations « toriques » où l'on met à profit la version logarithmique du théorème de « presque-pureté » de Faltings.

Grâce au lemme d'Abhyankar perfectoïde, on peut en fait attacher des algèbres perfectoïdes à toute algèbre affinoïde réduite  $\mathcal{B}$  sur  $\mathcal{K}$  de dimension  $n$ , en considérant  $\mathcal{B}$  comme une extension finie de  $\mathcal{A} := \mathcal{K}\langle \mathbb{T}_{\leq n} \rangle$  par le lemme de normalisation de Noether [6, cor. 6.1.2/2]. Soit  $g \in \mathcal{A}^o$  tel que  $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$  soit étale sur  $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ . Soient  $\mathcal{A}$  l'algèbre presque perfectoïde  $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{K}\langle \mathbb{T}_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}, g^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$ , et  $\mathcal{B}$  la fermeture intégrale de  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ . Alors  $\mathcal{B}$  est presque perfectoïde (prop. 5.3.1), et  $\mathcal{B}^{oa}$  est étale fini sur  $\mathcal{A}^{oa}$  modulo toute puissance de

<sup>24</sup> du moins celles où l'on cherche un contrôle et une économie de moyens - la construction de Colmez [9] fournit de grosses « enveloppes perfectoïdes » par extraction itérée de racines  $p$ -ièmes de toutes les unités principales.

$p$  dans le cadre  $(\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi\mathbb{T})^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[\mathbb{T}^{\frac{1}{p^\infty}}])$ , (via  $\mathbb{T}^{\frac{1}{p^k}} \mapsto g^{\frac{1}{p^k}}$ ). Si la question 3.5.1 a une réponse positive,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont même perfectoïdes.

## Remerciements

Je suis très reconnaissant à O. Gabber de m'avoir envoyé toute une liste d'erreurs, corrections, simplifications et suggestions (les éventuelles erreurs restantes sont évidemment de ma seule responsabilité). Je remercie aussi B. Bhatt et P. Scholze de leur intérêt pour ce travail, et les arbitres de leurs commentaires incisifs. Je remercie enfin le Laboratoire Fibonacci et la Scuola Normale Superiore de Pise où j'ai effectué une partie de ce travail dans les meilleures conditions.

## BIBLIOGRAPHIE

1. D. ANDERSON, D. DOBBS and M. ROITMAN, Root closure in commutative rings, *Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal*, **95** (1990), 1–11.
2. F. ANDREATTA, Generalized ring of norms and generalized  $(\Phi, \Gamma)$ -modules, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, **39** (2006), 599–647.
3. M. ARTIN, A. GROTHENDIECK and J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, vol. 2*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 270, Springer, New York, 1972, 270.
4. W. BARTENWERFER, Der erste Riemannsche Hebbarkeitssatz im nichtarchimedischen Fall, *J. Reine Angew. Math.*, **286–287** (1976), 144–163.
5. V. BERKOVICH, *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields*, Math. Surveys and Monographs, vol. 33, AMS, Providence, 1990.
6. S. BOSCH, U. GÜNTZER and R. REMMERT, Non-Archimedean Analysis. A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry, in *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 261, Springer, Berlin, 1984.
7. N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris, 1953.
8. N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Masson, Paris, 1985, chapitres 1 à 7.
9. P. COLMEZ, Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu*, **1** (2002), 331–439.
10. G. FALTINGS, Almost étale extensions, *Astérisque*, **279** (2002), 185–270.
11. I. FESENKO, On deeply ramified extensions, *J. Lond. Math. Soc.*, **57** (1998), 325–335.
12. J.-M. FONTAINE, Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids, in P. Scholze (ed.) *Séminaire Bourbaki, 64-ième année*, S. M. F. Astérisque, vol. 352, pp. 509–534, 2013.
13. J. FRESNEL and M. MATIGNON, Produit tensoriel topologique de corps valués, *Can. J. Math.*, **35** (1983), 218–273.
14. P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **90** (1962), 323–448.
15. O. GABBER and L. RAMERO, *Almost Ring Theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1800, Springer, New York, 2003.
16. O. GABBER and L. RAMERO, Foundations for almost ring theory, [arXiv:math/0409584v9](https://arxiv.org/abs/math/0409584v9).
17. R. GILMER and W. HEINZER, On the complete integral closure of an integral domain, *J. Aust. Math. Soc.*, **6** (1966), 351–361.
18. U. GÜNTZER, The norm of uniform convergence on the  $k$ -algebraic maximal spectrum of an algebra over a non-Archimedean valuation field  $k$ , *Mém. Soc. Math. Fr.*, **39–40** (1974), 101–121.
19. H. HERRLICH and G. STRECKER, Coreflective subcategories, *Trans. Am. Math. Soc.*, **157** (1971), 205–226.
20. K. KEDLAYA, On commutative non-archimedean Banach fields, [arXiv:1602.09004v1](https://arxiv.org/abs/1602.09004v1), 2016.
21. K. KEDLAYA and R. LIU, *Relative  $p$ -adic Hodge Theory, I. Foundations*, S. M. F. Astérisque, vol. 371, 2015.
22. S. Mac LANE, Categories for the working mathematician, 2ème éd, *Springer GTM*, **5** (1998).
23. T. MIHARA, Characterization of the Berkovich spectrum of the Banach algebra of bounded continuous functions, *Doc. Math.*, **19** (2014), 769–799.
24. T. MIHARA, On Tate acyclicity and uniformity of Berkovich spectra and adic spectra, *Isr. J. Math.*, **216** (2016), 61–105.

25. D. MUMFORD, *Abelian Varieties*, Oxford Univ. Press, Tata, 1970, 3rd edn., 2010.
26. M. OLSSON, On Faltings' method of almost étale extensions, in *Algebraic Geometry, Part 2, Seattle, 2005*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, pp. 811–936, Am. Math. Soc., Providence, 2009.
27. J. POINEAU, Les espaces de Berkovich sont angéliques, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **141** (2013), 267–297.
28. P. ROBERTS, The root closure of a ring of mixed characteristic, [arXiv:0810.0215](https://arxiv.org/abs/0810.0215).
29. J.-E. ROOS, Derived functors of inverse limits revisited, *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **73** (2006), 65–83.
30. P. SCHOLZE, Perfectoid spaces, *Publ. Math. IHÉS*, **116** (2012), 245–313.
31. P. SCHOLZE, On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties, *Ann. Math.*, **182** (2015), 945–1066.
32. K. SHIMOMOTO, An application of the almost purity theorem to the homological conjectures, *J. Pure Appl. Algebra*, **220** (2014).
33. T. SZAMUELY, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
34. I. WASCHKIES, The stack of microlocal perverse sheaves, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **132** (2004), 397–462.
35. J.-P. WINTENBERGER, Une généralisation du théorème de Tate-Sen-Ax, *Groupe étude Anal. Ultramétr.*, **15** (1987), 1–5.

Y. A.

Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

[yves.andre@imj-prg.fr](mailto:yves.andre@imj-prg.fr)

*Manuscrit reçu le 28 août 2016*

*Versión révisée le 16 novembre 2017*

*Manuscrit accepté le 20 novembre 2017*

*publié en ligne le 7 décembre 2017.*